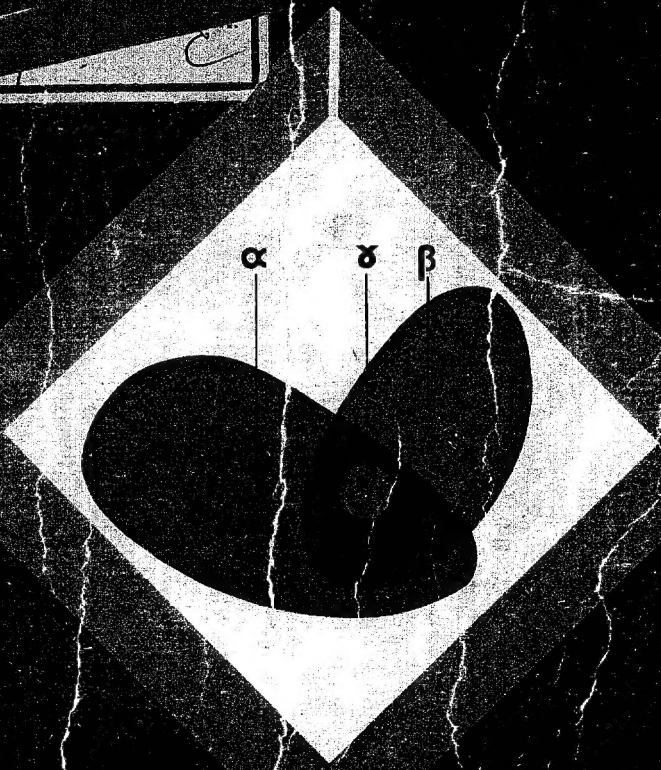
CLOPEDIA DE BUZUNAR



GR. C. MOISIL

Elemente de logică matematică și de teoria mulțimilor

GR. C. MOISIL

Elemente de logică matematică și de teoria mulțimilor

EDITURA ȘTIINȚIFICĂ • BUCUREȘTI 1968

Prefață

Evoluția tulburătoare a științelor matematice în vremurile noastre are un prim aspect straniu. Apariția unor științe cu nume ca Logică matematică, Biologie matematică, Economie matematică, Psihologie matematică, Teoria matematică a învățării și Lingvistică matematică arată că domeniul de aplicare al acestor științe matematice s-a lărgit considerabil. Înainte aveam o Fizică matematică, căreia îi corespundea tehnica clasică. Noilor domenii matematizate le corespund noi domenii ale tehnicii, care toate întrebuințează calculatoarele digitale: programarea automată, bionica, automatele cu autoinstruire, traducerea automată.

În al doilea rînd matematica de azi se ridică la un grad de abstracție neîntîlnit înainte. Natura elementelor despre care se enunțau teoremele puncte, drepte, sau cercuri, numere sau vectori, nu mai apare azi în matematică; elementele sînt implicit caracterizate prin sistemul de axiome.

În al treilea rînd caracterul de cantitativ al matematicilor a evoluat către caracterul de structural.

În fine punctul de plecare al unei expuneri matematice e mai spre început decît cel al matematicilor clasice. Matematica nu evoluează de la axiome la teoreme, de la acestea la aplicații. Mersul ei este mult mai întretesut cu răsfrîngeri și cu anticipări.

Două, trei secole analiza matematică a fundat descoperirile astronomiei, mecanicii corpurilor rigide și ale mecanicii corpurilor deformabile, ale opticii și electromag-

netismului. În același timp matematicienii meditau asupra fundamentelor acestei analize convergența seriilor, continuitatea funcțiilor, existența ariei și cea a planului tangent, derivabilitatea integralelor și integrabilitatea derivatelor.

Normal, cursurile unei universități pleacă azi de la noțiunea naivă de mulțime și de la noțiunea naivă de număr natural.

În volumul de față plecăm de la noțiunea naivă de mulțime, dar nu pentru a merge înainte : aritmetica transfinită, topologia, algebra, algebra topologică, analiza funcțională, ci pentru a merge înapoi.

Teoria naivă a mulțimilor din capitolul I și IV, în care proprietățile se citesc pe figuri e dublată în capitolul II de o teorie încă și mai naivă a relațiilor binare. Sper că cititorul nu va fi dezorientat nici de abundența materiei nici de subtilitățile ce apar în acest studiu și, de asemenea, sper că el își va pune problema : aceste proprietăți nu trebuie ele oare să fie demonstrate?

Capitolul V arată că nu trebuie să fie demonstrate decît unele din ele, celelalte proprietăți deducîndu-se imediat; acestea sînt axiomele algebrelor booleene.

Că mulțimile și relațiile formează algebre booleene, acest lucru e dovedit în Capitolul VI, presupunînd dovedite anume proprietăți ale logicii predicatelor; acestea se pot demonstra cînd sînt admise anume proprietăți ale logicii propozițiilor. Acestea sînt demonstrate în capitolul VII. Iată mersul înapoi, către mai spre început.

Noțiunea de funcție ar fi putut fi de la început subsumată celei de relație. Am preferat, avînd în vedere importanța ei, să-i dedicăm un capitol special, capitolul III. Încadrăm algebric mai spre sfîrșit, la pp. 167 sqq, teoria relațiilor binare în teoria matricelor cu elemente într-o algebră booleană iar la pp. 169 sqq în teoria grafurilor și complexelor unidimensionale.

■

Logica matematică se întrebuințează. Am vrut, în capitolul VIII, să dăm cîteva din aplicațiile ei.

Primul paragraf expune teoria clasificării dichotomice, sub forma algebrică.

Grupul din București a dat o mare dezvoltare cercetărilor de teoria algebrică a circuitelor de comutație. Pentru acest motiv, acestor cercetări le-am făcut loc în al doilea paragraf al acestui capitol VIII.

Al treilea paragraf arată cum un domeniu al Economiei matematice, mult studiat în țara noastră: programarea pseudo booleană, e legat de logica matematică.

Lingvistica matematică are o frumoasă dezvoltare în Republica Socialistă România, grație lui Solomon Marcus; în ultimul paragraf al capitolului se arată legăturile între lingvistica matematică și logica matematică.

■

Cartea a fost scrisă din amintiri; de acum 34 ani am început să predau, uneori sistematic, deseori nesistematic capitole și paragrafe de logică matematică și de teoria mulțimilor. De atunci mi-au rămas în minte pagini pe care le-am transcris și din *Fundamenta Mathematicae* și din volumele lui W. Sierpinski, St. Banach și K. Kuratowski: îndepărtații mei profesori. Din lecturile mele de atunci n-a rămas decît o singură dovadă: proprietățile datorate studentului meu de pe vremea aceea, C. Trufinescu*, date la pp. 95— 96 și 108—111 ale acestui volum.

Erau pe atunci și logica matematică și teoria mulțimilor capitole înfricoșătoare de care oamenii de bine te îndemnau să nu te apropii. Azi public acest volum pentru tinerii matematicieni, pentru ingineri, pentru studenți, pentru profesorii de licee și elevii din ultimele clase. Cred că o să le folosească.

6 iulie 1967 Gr. C. M.

---

* *Sur le théorème de M. Banach*, în „Comptes rendus de l'Académie des sciences de Roumanie", t.I, 1936.

I

Algebra mulțimilor

Ideea de mulțime o considerăm ca înțeleasă de oricine ca și ideea exprimată prin propoziția:

individul a este un element al mulțimii α.

Această propoziție o vom scrie

$$a \in \alpha,$$

unde semnul „$\in$" este semnul relației de apartenență.

De asemenea, vom scrie

$$a \notin \alpha$$

în loc de:

individul a nu este element al mulțimii α.

Ideea de mulțime se întregește prin conceptul de mulțimi egale

$$\alpha = \beta,$$

adică de mulțimi care au aceleași elemente. Aceasta este o definiție a egalității dintre mulțimi.

Nu vom defini egalitatea între indivizi

$$a = b,$$

a și b fiind indivizi, ci o vom lua ca idee primitivă. Vom observa că

dacă $a = b$ și $a \in \alpha$, atunci $b \in \alpha$;

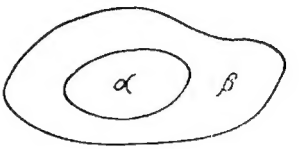
dacă $\alpha = \beta$ și $a \in \alpha$, atunci $a \in \beta$.

Dacă α, β sînt două mulțimi, spunem că *mulțimea* α *este cuprinsă în mulțimea* β * și scriem

$$\alpha \subset \beta,$$

dacă orice element al lui α este și element al lui β (fig.1).

Fig. 1



În loc de $\alpha \subset \beta$, putem scrie și $\beta \supset \alpha$, ceea ce se citește „mulțimea β cuprinde mulțimea α", sau „mulțimea β este o supramulțime a mulțimii α".

Dacă α nu este submulțime a lui β, scriem $\alpha \not\subset \beta$ sau $\beta \not\supset \alpha$.

Incluziunea se bucură de următoarea proprietate, numită *reflexivitatea incluziunii*:

$$\alpha \subset \alpha \qquad (1.1)$$

precum și de proprietatea numită *transitivitatea incluziunii* (fig. 2).

1.2. Dacă $\alpha \subset \beta$ și $\beta \subset \gamma$ atunci $\alpha \subset \gamma$

În fine, vom menționa și *antisimetria incluziunii*:

1.3. *Dacă* $\alpha \subset \beta$ și $\beta \subset \alpha$, *atunci* $\alpha = \beta$.

Într-adevăr, în acest caz α și β au aceleași elemente, căci orice element al lui α este și element al lui β și viceversa.

---

* sau
mulțimea α este o submulțime a mulțimii β,
sau:
mulțimea α este o parte a mulțimii β.

Dacă α și β sînt două mulțimi, numim *reuniunea* lor și o notăm $\alpha \cup \beta$ mulțimea elementelor care aparțin cel puțin uneia din mulțimile α, β; în fig. 3, $\alpha \cup \beta$ este mulțimea haşurată.

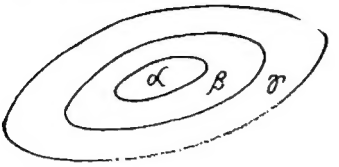


Fig. 2

Este evident că

$$\alpha \cup \beta = \beta \cup \alpha. \qquad (1\ 4)$$

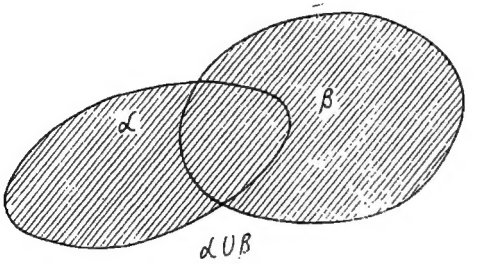
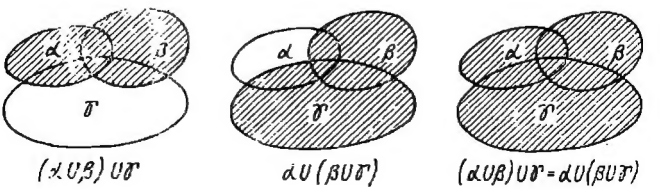


Fig. 3

Aceasta este numită *legea de comutativitate a reuniunii.*

Dacă avem trei mulțimi α, β, γ și formăm mulțimea $\alpha \cup \beta$, apoi $(\alpha \cup \beta) \cup \gamma$ și dacă formăm pe $\beta \cup \gamma$, apoi pe $\alpha \cup (\beta \cup \gamma)$, obținem aceeași mulțime $(\alpha \cup \beta) \cup \gamma =$

Fig. 4



$= \alpha \cup (\beta \cup \gamma)$ a elementelor ce aparțin cel puțin uneia din mulțimile α, β, γ (fig. 4), deci putem scrie

$$(\alpha \cup \beta) \cup \gamma = \alpha \cup (\beta \cup \gamma). \tag{1.5}$$

Aceasta este numită *legea de asociativitate a reuniunii.*

Putem deci să nu mai întrebuințăm paranteze și să scriem $\alpha \cup \beta \cup \gamma$ în loc de $\alpha \cup (\beta \cup \gamma)$ sau în loc de $(\alpha \cup \beta) \cup \gamma$.

Dacă avem patru mulțimi, putem forma mulțimile (fig. 5)

$$\begin{aligned} &((\alpha \cup \beta) \cup) \gamma \cup \delta, \\ &(\alpha \cup (\beta \cup \gamma)) \cup \delta, \\ &(\alpha \cup \beta) \cup (\gamma \cup \delta), \\ &\alpha \cup ((\beta \cup \gamma) \cup \delta), \\ &\alpha \cup (\beta \cup (\gamma \cup \delta)). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Aceste cinci mulțimi sînt egale în virtutea legii de asociativitate, căci din legea asociativă se deduce că mulțimile

$$\sigma = (\alpha \cup \beta) \cup \gamma,$$
$$\tau = \alpha \cup (\beta \cup \gamma)$$

sînt egale

$$\sigma = \tau,$$

deci

$$\sigma \cup \delta = \tau \cup \delta,$$

deci

$$((\alpha \cup \beta) \cup \gamma) \cup \delta = (\alpha \cup (\beta \cup \gamma)) \cup \delta.$$

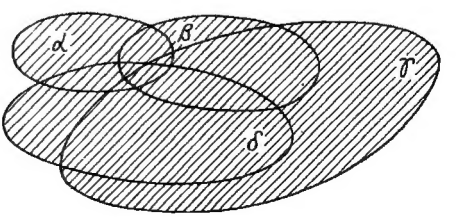


Fig. 5

Tot astfel dacă

$$\lambda = \alpha \cup \beta,$$

atunci

$$\lambda \cup (\gamma \cup \delta) = (\lambda \cup \gamma) \cup \delta,$$

dar

$$\lambda \cup \gamma = (\alpha \cup \beta) \cup \gamma$$
$$= \sigma,$$

deci.

$$\lambda \cup (\gamma \cup \delta) = \sigma \cup \delta$$
$$= ((\alpha \cup \beta) \cup \gamma) \cup \delta$$

ș.a.m.d.

Vom putea deci suprima parantezele; cele cinci mulțimi (1.6) fiind identice, le vom nota

$$\alpha \cup \beta \cup \gamma \cup \delta.$$

Aceasta este mulțimea elementelor care aparțin cel puțin uneia din mulțimile α, β, γ, δ.

În general, dacă

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$$

sînt n mulțimi, vom nota

$$\alpha_1 \cup \quad \cup \alpha_n$$

mulțimea elementelor ce aparțin cel puțin uneia din aceste mulțimi. Este vizibil că această mulțime este egală cu oricare din mulțimile obținute grupînd termenii.

În special putem, prin definiție, să luăm

$$\alpha_1 \cup \quad \cup \alpha_n = (\alpha_1 \cup \quad \cup \alpha_{n-1}) \cup \alpha_n \qquad (1.7)$$

În definirea lui $\alpha \cup \beta$ nu trebuie să presupunem că α și β sînt diferite; $\alpha \cup \alpha$ este mulțimea elementelor ce aparțin cel puțin uneia din mulțimile α, α, deci este formată din elementele mulțimii α; putem scrie *legea de idempotență a reuniunii:*

$$\alpha \cup \alpha = \alpha. \tag{1.8}$$

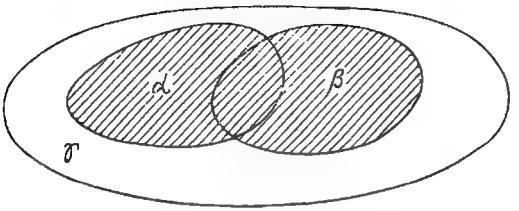


Fig. 6

Este vizibil, pe fig. 3, că

$$\alpha \subset \alpha \cup \beta,$$

$$\beta \subset \alpha \cup \beta. \tag{1.9}$$

Dacă $\alpha \subset \gamma$, $\beta \subset \gamma$, atunci orice element al lui $\alpha \cup \beta$ este sau element al lui α, sau măcar element al lui β și în amîndouă cazurile este element al lui γ, deci (fig. 6):

$$\textit{dacă } \alpha \subset \gamma \textit{ și } \beta \subset \gamma, \textit{ atunci } \alpha \cup \beta \subset \gamma. \tag{1.10}$$

De asemenea, vom observa că:

$$\alpha \subset \beta \textit{ echivalează cu } \alpha \cup \beta = \beta. \tag{1.11}$$

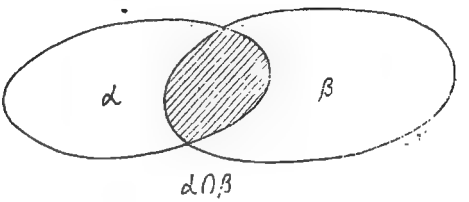
Într-adevăr, din $\alpha \subset \beta$ deducem că orice element al lui $\alpha \cup \beta$ sau este element al lui β, sau este element al lui α, deci este element al lui β, deci $\alpha \cup \beta \subset \beta$; dar $\beta \subset \alpha \cup \beta$, deci, dacă $\alpha \subset \beta$, atunci $\alpha \cup \beta = \beta$. Reciproc, dacă $\alpha \cup \beta = \beta$, deoarece $\alpha \subset \alpha \cup \beta$, deducem că $\alpha \subset \beta$.

Dacă α și β sînt două mulțimi, numim intersecția lor și o notăm $\alpha \cap \beta$ mulțimea formată din elementele comune lui α și β; $\alpha \cap \beta$ este mulțimea haşurată din fig. 7.

Este evident că este valabilă *legea de comutativitate a intersecției*

$$\alpha \cap \beta = \beta \cap \alpha. \tag{1.12}$$

Fig. 7



Să formăm pe $\alpha \cap \beta$, $\beta \cap \gamma$, $(\alpha \cap \beta) \cap \gamma$, $\alpha \cap (\beta \cap \gamma)$, ca în fig 8. Este vizibil că $(\alpha \cap \beta) \cap \gamma$ și $\alpha \cap (\beta \cap \gamma)$ sînt aceeași mulțime, și anume mulțimea elementelor comune lui α, β, γ:

$$(\alpha \cap \beta) \cap \gamma = \alpha \cap (\beta \cap \gamma). \tag{1.13}$$

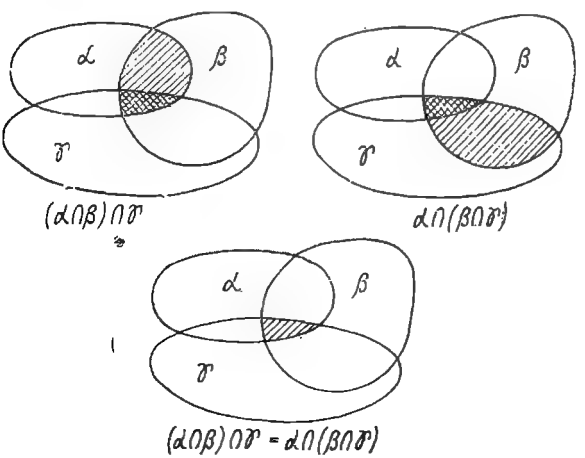


Fig 8.

Vom suprima parantezele, scriind $\alpha \cap \beta \cap \gamma$, în loc de $(\alpha \cap \beta) \cap \gamma$ sau în loc de $\alpha \cap (\beta \cap \gamma)$.

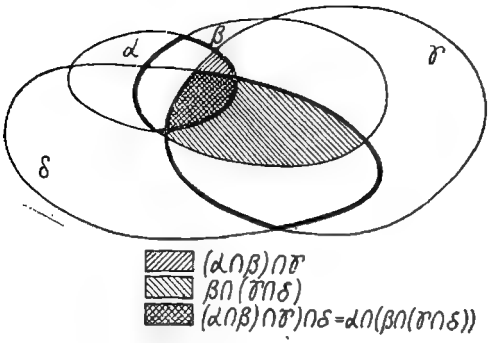


Fig. 9

Dacă avem patru mulțimi, atunci, cum se vede pe fig. 9, mulțimile

$$\begin{aligned} &((\alpha \cap \beta) \cap \gamma) \cap \delta, \\ &(\alpha \cap (\beta \cap \gamma)) \cap \delta, \\ &(\alpha \cap \beta) \cap (\gamma \cap \delta), \\ &\alpha \cap ((\beta \cap \gamma) \cap \delta), \\ &\alpha \cap (\beta \cap (\gamma \cap \delta)) \end{aligned} \tag{1.14}$$

sînt identice; în aceste cinci expresii vom suprima parantezele, scriindu-le

$$\alpha \cap \beta \cap \gamma \cap \delta$$

și, în genere, vom scrie

$$\alpha_1 \cap \quad \cap \alpha_n = (\alpha_1 \cap \quad \cap \alpha_{n-1}) \cap \alpha_n. \tag{1.15}$$

În formarea intersecției a două mulțimi nu este necesar să presupunem că ele sînt diferite; $\alpha \cap \alpha$ este mulțimea elementelor ce aparțin și lui α, și lui α; ea este deci α, deci este valabilă *legea de idempotență a intersecției:*

$$\alpha \cap \alpha = \alpha. \tag{1.16}$$

Este vizibil din fig. 7 că

$$\alpha \cap \beta \subset \alpha,$$
$$\alpha \cap \beta \subset \beta. \tag{1.17}$$

Dacă $\gamma \subset \alpha$ și $\gamma \subset \beta$, atunci (fig. 10) orice element al

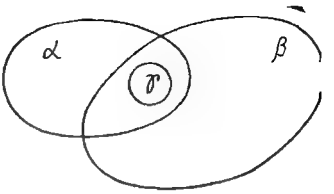


Fig. 10

lui γ este element comun al lui α și al lui β, este deci element al lui $\alpha \cap \beta$, deci:

dacă $\gamma \subset \alpha$ *și* $\gamma \subset \beta$, *atunci* $\gamma \subset \alpha \cap \beta$ (1.18)

$\alpha \subset \beta$ *echivalează cu* $\alpha \cap \beta = \alpha$. (1.19)

Într-adevăr, din $\alpha \subset \beta$ deducem că orice element al lui α este și element al lui β, deci este element al lui $\alpha \cap \beta$, deci $\alpha \subset \alpha \cap \beta$; dar $\alpha \cap \beta \subset \alpha$, deci $\alpha \cap \beta = \alpha$. Reciproc, dacă $\alpha \cap \beta = \alpha$, deoarece $\alpha \cap \beta \subset \beta$, deducem $\alpha \subset \beta$.

MULȚIMEA VIDĂ, MULȚIMEA TOTALĂ, MULȚIMI CU UN SINGUR ELEMENT

Mulțimi disjuncte. Vom spune că:

1. 20 *Două mulțimi sînt disjuncte dacă nu au elemente comune* (fig. 11).

Fig. 11

1. 21 *Relația de disjuncție este simetrică*: *dacă* α si β *sînt disjuncte, atunci* β *și* α *sînt disjuncte.*

1.22 *Dacă* α *și* β *sînt disjuncte, atunci* α *și* $\beta \cap \gamma$ *sînt disjuncte și de asemenea* $\alpha \cap \gamma$ *și* β *sînt disjuncte.*

Într-adevăr, un element comun lui α și $\beta \cap \gamma$ ar fi un element comun lui α, lui β și lui γ (fig. 12), deci ar fi un

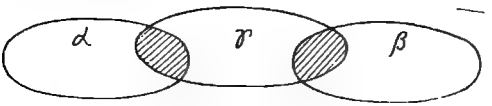


Fig. 12

element comun lui α și β, deci, un astfel de element neexistînd, α și $\beta \cap \gamma$ sînt disjuncte; analog pentru $\alpha \cap \gamma$ și β.

1.23 *Dacă* α *și* β *sînt disjuncte și dacă* $\gamma \subset \alpha$, *atunci* γ *și* β *sînt disjuncte* (fig. 13), căci un element comun lui γ și β fiind element al lui γ, ar fi element al lui α, deci ar fi element comun lui α și β.

1.24 *Dacă* α *și* β *sînt disjuncte și dacă* $\gamma \subset \alpha$ *și* $\delta \subset \beta$, *atunci* γ *și* δ *sînt disjuncte* (fig. 14), căci un element comun lui γ și δ ar fi un element comun lui α și β.

Mulțimea vidă și mulțimile cu un element. Cînd am definit intersecția a două mulțimi nu am menționat faptul că cele două mulțimi nu sînt disjuncte. De asemenea, cînd am vorbit de intersecția a trei mulțimi α, β, γ. În acest ultim caz, ar fi trebuit să precizăm că α și β, β și γ, α și $\beta \cap \gamma$, $\alpha \cap \beta$ și γ nu sînt disjuncte. Teoria ar fi foarte complicată.

Este mai ușor să procedăm altfel.

Să introducem printre mulțimi și:

1.25 *mulțimea vidă*, adică mulțimea care nu are nici un element; o notăm cu $\emptyset$.

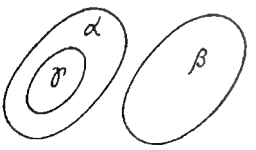


Fig. 13

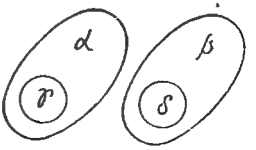


Fig. 14

Deci vom schimba înțelesul cuvîntului mulțime.

De altfel, în limbajul natural cuvîntul mulțime desemnează numai mulțimile ce au cel puțin două elemente.

Vom întrebuința de aici înainte cuvîntul mulțime (în sens matematic) pentru a desemna:

1. mulțimile astfel numite în limba naturală;
2. mulțimea vidă;
3. mulțimile cu un element.

1.26 *mulțimea care nu are decît un element, și anume pe a, o notăm* cu $\{a\}$.

Grație introducerii mulțimii vide, intersecția $\alpha \cap \beta$ se definește și pentru două mulțimi disjuncte, ea fiind în acest caz mulțimea vidă.

A spune că

$$\alpha \text{ și } \beta \text{ sînt disjuncte,}$$
$$\alpha \cap \beta = \emptyset$$

sînt afirmații echivalente.

Formularea de la p. 17 a relației de disjuncție a două mulțimi ca fiind relația între două mulțimi ce nu au elemente comune dă

1. orice mulțime este disjunctă de $\emptyset$;
2. $\emptyset$ și $\emptyset$ sînt disjuncte.

Bineînțeles, formularea de la p. 15 a definiției intersecției a două mulțimi și observațiile de mai sus justifică aserțiunile

$$\begin{aligned} \emptyset \cap \emptyset &= \emptyset, \\ \emptyset \cap \alpha &= \emptyset, \\ \alpha \cap \emptyset &= \emptyset. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Să observăm că $\{c\}$ și α sînt disjuncte, dacă c nu aparține lui α; dacă c aparține lui α, $\{c\} \cap \alpha = \alpha \cap \{c\}$ se reduce la $\{c\}$.

Să reluăm definiția incluziunii $\alpha \subset \beta$, înseamnă că orice element al lui α este element al lui β.

1. Dacă α este mulțimea $\{a\}$ care nu are decît elementul a, $\{a\} \subset \beta$ înseamnă că a este un element al lui β.

2. Dacă β este mulțimea $\{b\}$, $\alpha \subset \{b\}$, înseamnă că orice element al lui α este b, deci înseamnă că α, dacă

are elemente, se compune numai din b, deci că $\alpha = \{b\}$ sau $\alpha = \emptyset$.

3. Dacă $\alpha = \{a\}$ și $\beta = \{b\}$ și dacă $\alpha \subset \beta$, deci dacă $\{a\} \subset \{b\}$, atunci $a = b$.

4. Dacă α este mulțimea vidă, atunci nici un x nu este element al lui α, deci orice x dacă ar fi element al lui α, ar fi și al lui β *, deci avem

$$\emptyset \subset \beta. \tag{1.28}$$

Deci: mulțimea vidă este o submulțime a oricărei mulțimi.

5. Dacă β este mulțimea vidă și dacă $\alpha \subset \beta$, atunci orice element al lui α ar fi element al lui β, deci nu există nici un element al lui α, deci α este $\emptyset$, deci: *$\emptyset$ nu are nici o submulțime diferită de ea*: dacă $\alpha \subset \emptyset$, atunci $\alpha = \emptyset$.

6. Din cele spuse la punctul 5 putem deduce că

$$\emptyset \subset \emptyset, \tag{1.29}$$

dar această propoziție este adevărată nu în virtutea proprietății de reflexivitate a incluziunii, căci atunci nu ne gîndeam și la mulțimea vidă ca la o mulțime, ci în virtutea faptului că ea traduce proprietatea: dacă mulțimea $\emptyset$ ar avea un element, acel element ar fi și element al lui $\emptyset$, care este adevărată, fiindcă $\emptyset$ nu are nici un element *.

Să observăm că orice mulțime cu un singur element se bucură de proprietatea că *ea nu are decît două submulțimi*: *pe ea însăși și mulțimea vidă.*

Mulțimile cu un singur element se numesc uneori *mulțimi atomice.*

Lăsăm pe seama cititorului demonstrarea proprietăților reflexivității, tranzitivității și antisimetriei relației de incluziune pentru cazul cînd unele din mulțimi sînt atomice sau vide.

Vom observa că formularea definiției reuniunii (dată la p. 11) ca fiind mulțimea care are ca elemente elementele

* Vezi și p. 153.

ce aparțin cel puțin uneia din cele două mulțimi, aplicată cuvînt cu cuvînt, dă:

1. $$\alpha \cup \emptyset = \alpha,$$

$$\emptyset \cup \beta = \beta; \tag{1.30}$$

2. $\alpha \cup \{c\}$, $\{c\} \cup \alpha$ sînt mulțimi obținute adăugînd elementelor mulțimii α elementul c (uneori se notează „α; c“ mulțimea $\{c\} \cup \alpha = \alpha \cup \{c\}$).

Adeseori în loc de $\emptyset$ se scrie 0; uneori în loc de $\{a\}$ se scrie a.

Mulțimea totală. Vom considera mulțimea I a tuturor elementelor. Oricare ar fi x el este element al lui I, deci oricare ar fi mulțimea α, avem

$$\alpha \subset I, \tag{1.31}$$

$$I \cup \alpha = \alpha \cup I = I,$$

$$I \cap \alpha = \alpha \cap I = \alpha. \tag{1.32}$$

Vom prefera să desenăm orice mulțime ca o submulțime a lui I, ca în fig. 15.

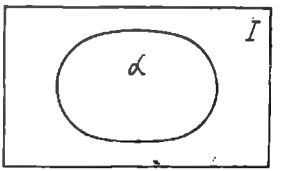


Fig. 15

Adeseori în loc de I se scrie 1.

Exerciții

1. $a \in \alpha$, dacă și numai dacă $\{a\} \subset \alpha$;
2. $a \notin \alpha$, dacă și numai dacă $\{a\} \cap \alpha = \emptyset$;
3. $a = b$, dacă și numai dacă $\{a\} = \{b\}$;
4. $a = b$, dacă și numai dacă $a \in \{b\}$;
5. $\alpha \subset \{a\}$, dacă și numai dacă $\alpha = \{a\}$ sau $\alpha = \emptyset$;
6. $\{a\} \cap \{b\} = \emptyset$, dacă și numai dacă $a \neq b$;
7. $x \in \{a\} \cup \{b\}$, dacă și numai dacă $x = a$ sau $x = b$;

8. $\alpha \subset \beta$, dacă și numai dacă, oricare ar fi γ, din $\gamma \subset \alpha$ deducem $\gamma \subset \beta$;

9. $\alpha \subset \beta$, dacă și numai dacă, oricare ar fi γ, din $\gamma \supset \beta$ deducem $\gamma \supset \alpha$.

LEGILE DE DISTRIBUTIVITATE ȘI DE ABSORBȚIE

Legile de distributivitate. Figurile 16 și 17 ne dovedesc următoarele formule

$$(\alpha \cup \beta) \cap \gamma = (\alpha \cap \gamma) \cup (\beta \cap \gamma),$$

$$(\alpha \cap \beta) \cup \gamma = (\alpha \cup \gamma) \cap (\beta \cup \gamma)$$

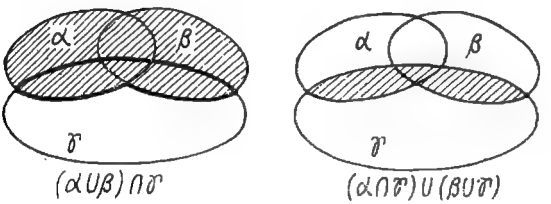


Fig. 16

Legile comutative arată că sînt valabile egalitățile

$$\alpha \cap (\beta \cup \gamma) = (\alpha \cap \beta) \cup (\alpha \cap \gamma), \qquad (1.33)$$

$$\alpha \cup (\beta \cap \gamma) = (\alpha \cup \beta) \cap (\alpha \cup \gamma). \qquad (1.34)$$

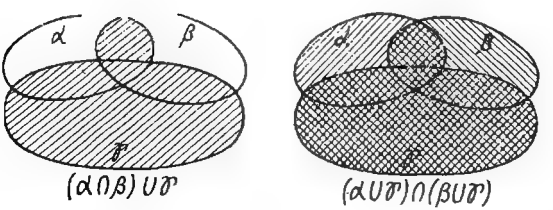


Fig 17

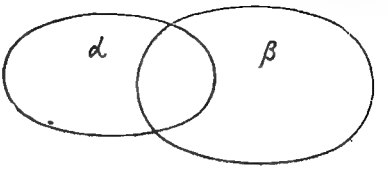
Aceste legi se numesc *legile de distributivitate*. Ele servesc la desfacerea parantezelor sau, invers, la scoaterea de factor comun.

Legile de absorbție. Avem:

$$\alpha \cap (\alpha \cup \beta) = \alpha, \tag{1.35}$$

$$\alpha \cup (\alpha \cap \beta) = \alpha. \tag{1.36}$$

Fig. 18



Într-adevăr (fig. 18), elementele comune lui α și lui $\alpha \cup \beta$ sînt cele care aparțin în același timp lui α și măcar uneia dintre α, β, deci sînt elementele lui α, deci (1.35) este dovedită. Elementele care aparțin și lui α, și lui β, și cele ce aparțin măcar lui α sînt toate elementele lui α, și astfel (1.36) este dovedită.

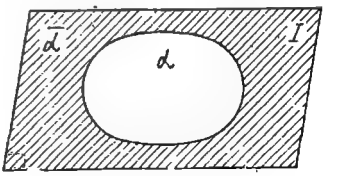
COMPLEMENTARA UNEI MULȚIMI

Vom numi complementară a lui α și vom nota cu $\bar{\alpha}$ sau α', sau $I - \alpha$, sau $\mathbf{C}\alpha$ mulțimea tuturor elementelor ce nu aparțin lui α (fig. 19). $x \in \bar{\alpha}$ înseamnă $x \notin \alpha$.

Este vizibil că orice element aparține sau lui α sau lui $\bar{\alpha}$:

$$\alpha \cup \bar{\alpha} = I \tag{1.37}$$

Fig. 19



și nici unul nu aparține și lui α și lui $\bar{\alpha}$:

$$\alpha \cap \bar{\alpha} = \emptyset. \tag{1.38}$$

Formulele (1.37) și (1.38) au o mare importanță și poartă numele de *principiul excluderii terțiului (tertium non datur)* și *principiul contradicției* *.

Principiul contradicției este enunțat uneori sub forma : *S* nu poate fi *P* și non *P* în același timp. Se vede că acesta este înțelesul lui (1.38).

Principiul terțiului exclus se enunță uneori sub forma : *S* trebuie să fie sau *P* sau non-*P*; a treia posibilitate este exclusă.

Se vede că acesta este înțelesul lui (1.37).

Este vizibil că relația între α și $\bar{\alpha}$ este simetrică, deci

$$\bar{\bar{\alpha}} = \alpha. \tag{1.39}$$

Această formulă este uneori numită principiul reciprocității speciilor complementare; el corespunde *principiului dublei negații*, uneori enunțat sub forma : negația negației echivalează cu afirmația, căci a spune că un element aparține lui $\bar{\alpha}$, înseamnă a nega că el ar aparține lui α.

Legile lui Morgan. Figura 20 ne arată că

$$\overline{\alpha \cup \beta} = \bar{\alpha} \cap \bar{\beta}, \tag{1.40}$$

$$\overline{\alpha \cap \beta} = \bar{\alpha} \cup \bar{\beta}. \tag{1.41}$$

Într-adevăr, mulțimea haşurată în amîndouă sensurile este $\overline{\alpha \cup \beta}$ și ea este mulțimea intersecție a celei haşurate într-un sens ($\bar{\alpha}$) și a celei haşurate în celălalt sens ($\bar{\beta}$), deci (1.40).

Mulțimea haşurată într-unul măcar din sensuri este $\overline{\alpha \cap \beta}$ și ea este formată reunind cele două mulțimi haşurate măcar într-un sens $\bar{\alpha}$ și $\bar{\beta}$.

Dacă $\alpha \subset \beta$, atunci $\alpha \cup \beta = \beta$, deci $\overline{\alpha \cup \beta} = \bar{\beta}$, deci $\bar{\alpha} \cap \bar{\beta} = \bar{\beta}$, deci $\bar{\beta} \subset \bar{\alpha}$; am dovedit astfel legea de contrapoziție :

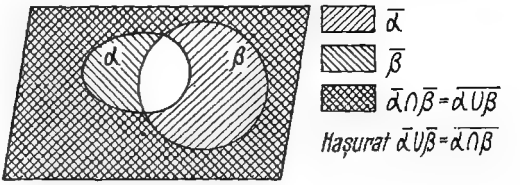
---

* Uneori numit „principiul necontradicției".

Dacă $\alpha \subset \beta$, *atunci* $\bar{\beta} \subset \bar{\alpha}$. (1.42)

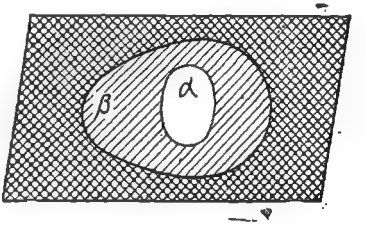
Această proprietate se citește pe fig. 21; complementara lui β este mulțimea haşurată în amindouă sen-

Fig. 20



surile şi este cuprinsă în mulțimea haşurată într-un sens, care este complementara lui α, cu $\alpha \subset \beta$

Fig. 21



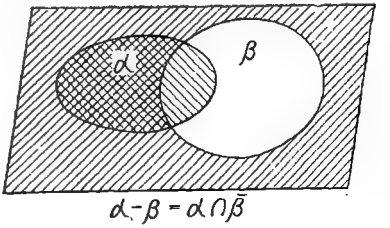
Exerciții

Paginile ce urmează conțin exerciții. Cititorul este îndemnat să facă şi calculul şi figura.

Diferența. Se definește (fig. 22) diferența a două mulțimi $\alpha - \beta$ prin

$$\alpha - \beta = \alpha \cap \bar{\beta}; \qquad (1.43)$$

Fig. 22



$\alpha - \beta$ este mulțimea elementelor care aparțin lui α, dar nu lui β.

Este evident că:

1. $a \in \alpha$, dacă și numai dacă $[\alpha - \{a\}] \cup \{a\} = \alpha$;
2. $a \notin \alpha$, dacă și numai dacă $\alpha - \{a\} = \alpha$;
3. $a \notin \alpha - \{a\}$.

Proprietăți ale diferenței

$$(\alpha \cap \beta) - \gamma = (\alpha - \gamma) \cap (\beta - \gamma). \qquad (1.44)$$

Soluție, ca exemplu:

$$(\alpha \cap \beta) - \gamma = (\alpha \cap \beta) \cap \bar{\gamma}$$

din idempotența intersecției $= (\alpha \cap \beta) \cap (\bar{\gamma} \cap \bar{\gamma})$,
din asociativitatea și comutativitatea intersecției:

$$= (\alpha \cap \bar{\gamma}) \cap (\beta \cap \bar{\gamma}),$$
$$= (\alpha - \gamma) \cap (\beta - \bar{\gamma}).$$

Intuitiv fig. 23 și 24.

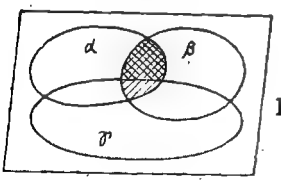
$$(\alpha \cup \beta) - \gamma = (\alpha - \gamma) \cup (\beta - \gamma), \qquad (1.45)$$

$$\alpha - (\beta \cap \gamma) = (\alpha - \beta) \cup (\alpha - \gamma), \qquad (1.46)$$

$$\alpha - (\beta \cup \gamma) = (\alpha - \beta) \cap (\alpha - \gamma), \qquad (1.47)$$

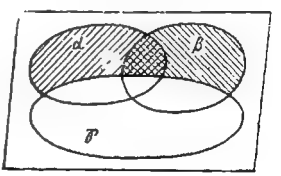
$$\alpha - \alpha = \emptyset, \qquad (1.48)$$

$$(\alpha - \beta) - \gamma = \alpha - (\beta \cup \gamma), \qquad (1.49)$$



$(\alpha \cap \beta) - \gamma$

Fig. 23



$(\alpha - \gamma) \cap (\beta - \gamma)$

Fig. 24

$$(\alpha - \beta) - \gamma = (\alpha - \gamma) - \beta, \qquad (1.50)$$

$$(\alpha - \beta) \cup \beta \supset \alpha, \qquad (1.51)$$

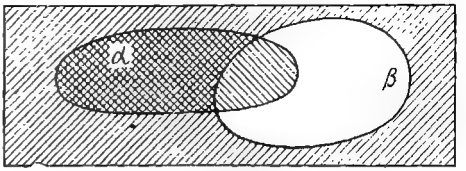
$$\text{dacă } \alpha \subset \beta \cup \gamma, \quad \text{atunci } \alpha - \beta \subset \gamma \qquad (1.52)$$

$$\alpha \supset \alpha - \beta, \tag{1.53}$$

dacă $\alpha \supset \beta - \gamma$, *atunci* $\beta - \alpha \subset \gamma - \alpha$, (1.54)

dacă $\alpha \subset \beta$, *atunci* $\gamma - \alpha \supset \gamma - \beta$, (1.55)

Fig. 25



dacă $\alpha \subset \beta$, *atunci* $\alpha - \gamma \subset \beta - \gamma$, (1.56)

$$(\alpha - \beta) \cup (\beta - \gamma) \supset \alpha - \gamma. \tag{1.57}$$

Reziduația. Se definește (fig. 25) reziduația α β prin

$$\alpha : \beta = \alpha \cup \overline{\beta}. \tag{1.58}$$

Se scrie uneori

$$\alpha \to \beta = \beta : \alpha. \tag{1.59}$$

Proprietăți ale reziduației

$$\alpha \quad \alpha = I, \tag{1.60}$$

$$\alpha \to \alpha = I, \tag{1.60*}$$

$$(\alpha \cap \beta) \quad \gamma = (\alpha \quad \gamma) \cap (\beta \quad \gamma), \tag{1.61}$$

$$\alpha \to (\beta \cap \gamma) = (\alpha \to \beta) \cap (\alpha \to \gamma), \tag{1.61*}$$

$$(\alpha \cup \beta) : \gamma = (\alpha : \gamma) \cup (\beta : \gamma), \tag{1.62}$$

$$\alpha \to (\beta \cup \gamma) = (\alpha \to \beta) \cup (\alpha \to \gamma), \tag{1.62*}$$

$$\alpha \quad (\beta \cap \gamma) = (\alpha \quad \beta) \cup (\alpha \quad \gamma), \tag{1.63}$$

$$(\alpha \cap \beta) \to \gamma = (\alpha \to \gamma) \cup (\beta \to \gamma), \tag{1.63*}$$

$$\alpha \quad (\beta \cup \gamma) = (\alpha \quad \beta) \cap (\alpha \quad \gamma), \tag{1.64}$$

$$(\alpha \cup \beta) \to \gamma = (\alpha \to \gamma) \cap (\beta \to \gamma), \tag{1.64*}$$

$$(\alpha : \beta) \quad \gamma = \alpha \quad (\beta \cap \gamma), \tag{1.65}$$

$$\alpha \to (\beta \to \gamma) = (\alpha \cap \beta) \to \gamma, \tag{1.65*}$$

$$(\alpha \quad \beta) : \gamma = (\alpha : \gamma) \quad \beta, \tag{1.66}$$

$$\alpha \to (\beta \to \gamma) = \beta \to (\alpha \to \gamma), \tag{1.66*}$$

$$(\alpha \quad \beta) \cap \beta \subset \alpha, \tag{1.67}$$

$$\alpha \cap (\alpha \to \beta) \subset \beta \tag{1.67*}$$

dacă $\alpha \supset \beta \cap \gamma$, *atunci* $\alpha \quad \beta \supset \gamma$, (1.68)

dacă $\alpha \cap \beta \subset \gamma$, *atunci* $\alpha \subset \beta \to \gamma$, (1.68 *)

$$\alpha \subset \alpha \quad \beta, \tag{1.69}$$

$$\alpha \subset \beta \to \alpha, \tag{1.69*}$$

dacă $\alpha \subset \beta \quad \gamma$, *atunci* $\beta \quad \alpha \supset \gamma \quad \alpha$, (1.70)

dacă $\alpha \subset \beta \to \gamma$, *atunci* $\alpha \to \beta \subset \alpha \to \gamma$, (1.70*)

dacă $\alpha \subset \beta$, *atunci* $\gamma \quad \alpha \supset \gamma \quad \beta$, (1.71)

dacă $\alpha \subset \beta$, *atunci* $\alpha \to \gamma \supset \beta \to \gamma$, (1.71*)

dacă $\alpha \subset \beta$, *atunci* $\alpha : \gamma \subset \beta : \gamma$, (1.72)

dacă $\alpha \subset \beta$, *atunci* $\beta \to \gamma \subset \alpha \to \gamma$, (1.72*)

$$(\alpha \quad \beta) \cap (\beta : \gamma) \subset \alpha \quad \gamma, \tag{1.73}$$

$$(\alpha \to \beta) \cap (\beta \to \gamma) \subset \alpha \to \gamma. \tag{1.73*}$$

Avem:

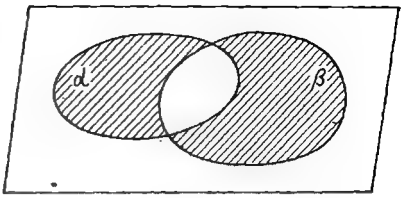
$$\alpha : \beta = \overline{\overline{\alpha} - \overline{\beta}} \tag{1.74}$$

$$\alpha - \beta = \overline{\overline{\alpha} : \overline{\beta}}. \tag{1.75}$$

Suma (diferența simetrică). Se definește (fig. 26) suma $\alpha + \beta$ (numită de obicei diferență simetrică) prin*

$$\alpha + \beta = (\alpha - \beta) \cup (\beta - \alpha). \tag{1.76}$$

Fig. 26



Proprietăți ale diferenței simetrice

$$\alpha + \beta = (\alpha \cap \bar{\beta}) \cup (\bar{\alpha} \cap \beta), \tag{1.77}$$

$$\alpha + \beta = (\alpha \cup \beta) \cap (\bar{\alpha} \cup \bar{\beta}) \tag{1.78}$$

$$\alpha + \alpha = \emptyset, \tag{1.79}$$

$$\alpha + \emptyset = \alpha, \tag{1.80}$$

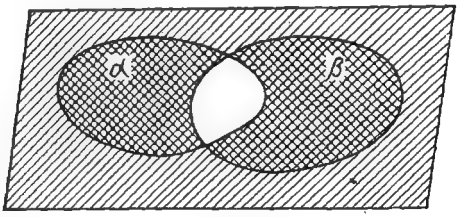
$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma, \tag{1.81}$$

$$\alpha \cap (\beta + \gamma) = (\alpha \cap \beta) + (\alpha \cap \gamma), \tag{1.82}$$

$$\alpha + \bar{\alpha} = \mathrm{I}. \tag{1.83}$$

$$\alpha + \mathrm{I} = \bar{\alpha} \tag{1.84}$$

Fig. 27



Suma duală sau echivalența. Se definește (fig. 28) echivalența sau suma duală a două mulțimi α, β prin

$$\alpha \tilde{+} \beta = (\alpha : \beta) \cap (\beta \quad \alpha) \tag{1.85}$$

---

* De obicei diferența simetrică $a + b$ este notată $a \Delta b$ sau $a \oplus b$

sau $\alpha \mathbin{\widetilde{+}} \beta = (\alpha \to \beta) \cap (\beta \to \alpha)$ (1.86

și se scrie uneori $\alpha \leftrightarrow \beta$ în loc de $\alpha \mathbin{\widetilde{+}} \beta$, deci

$$\alpha \leftrightarrow \beta = (\alpha \to \beta) \cap (\beta \to \alpha). \quad (1.87$$

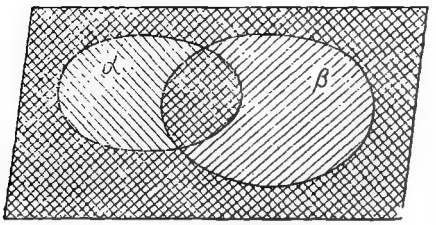


Fig. 28

Proprietăți ale sumei duale

$$\alpha \mathbin{\widetilde{+}} \beta = (\alpha \cup \bar{\beta}) \cap (\bar{\alpha} \cup \beta), \quad (1.88)$$

$$\alpha \mathbin{\widetilde{+}} \beta = (\alpha \cap \beta) \cup (\bar{\alpha} \cap \bar{\beta}), \quad (1.89)$$

$$\alpha \mathbin{\widetilde{+}} \alpha = I, \quad (1.90)$$

$$\alpha \mathbin{\widetilde{+}} I = \alpha, \quad (1.91)$$

$$\alpha \mathbin{\widetilde{+}} (\beta \mathbin{\widetilde{+}} \gamma) = (\alpha \mathbin{\widetilde{+}} \beta) \mathbin{\widetilde{+}} \gamma, \quad (1.92)$$

$$\alpha \cup (\beta \mathbin{\widetilde{+}} \gamma) = (\alpha \cup \beta) \mathbin{\widetilde{+}} (\alpha \cup \gamma), \quad (1.93)$$

$$\alpha \mathbin{\widetilde{+}} \bar{\alpha} = \emptyset. \quad (1.94)$$

Avem :

$$\alpha \mathbin{\widetilde{+}} \beta = \overline{\alpha + \beta}, \quad (1.95)$$

$$\alpha + \beta = \overline{\bar{\alpha} \mathbin{\widetilde{+}} \bar{\beta}}, \quad (1.96)$$

$$\alpha \mathbin{\widetilde{+}} \beta = \alpha + \beta + I, \quad (1.97)$$

$$\alpha + \beta = \alpha \mathbin{\widetilde{+}} \beta \mathbin{\widetilde{+}} \emptyset. \quad (1.98)$$

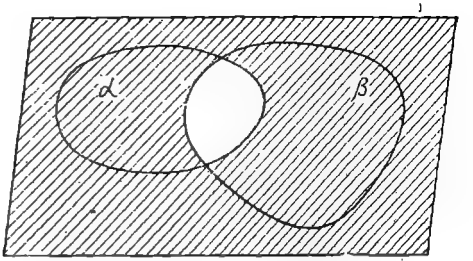
Funcția lui Sheffer. Se definește (fig. 29) funcția lui Sheffer $\alpha \mathbin{\underline{|}} \beta$ (sau $\alpha \,|\, \beta$) prin

$$\alpha \mathbin{\underline{|}} \beta = \bar{\alpha} \cup \beta, \quad (1.99)$$

ceea ce înseamnă:

$$\alpha \perp \beta = \alpha \to \bar{\beta},$$

Fig. 29



care se mai poate citi „α implică non β", sau „α exclude β", de unde numele de excluziune pentru funcția $\perp$.

Proprietăți ale funcției lui Sheffer

$$\alpha \perp \beta = \overline{\alpha \cap \beta}, \tag{1.100}$$

$$\alpha \perp \alpha = \bar{\alpha}, \tag{1.101}$$

$$(\alpha \perp \beta) \perp (\alpha \perp \beta) = \alpha \cap \beta, \tag{1.102}$$

$$(\alpha \perp \alpha) \perp (\beta \perp \beta) = \alpha \cup \beta, \tag{1.103}$$

$$\alpha \perp \emptyset = I, \tag{1.104}$$

$$\alpha \perp I = \bar{\alpha}, \tag{1.105}$$

$$\alpha \perp \alpha = I. \tag{1.106}$$

Funcția „nici".* Se definește (fig. 30) funcția „nici": $\alpha \top \beta$ prin

$$\alpha \top \beta = \bar{\alpha} \cap \bar{\beta}. \tag{1.107}$$

Proprietăți ale funcției „nici"

$$\alpha \top \beta = \overline{\alpha \cup \beta}, \tag{1.108}$$

$$\alpha \top \alpha = \bar{\alpha}, \tag{1.109}$$

$$(\alpha \top \beta) \top (\alpha \top \beta) = \alpha \cup \beta, \tag{1.110}$$

* sau funcția lui Peirce.

$$(\alpha \top \alpha) \top (\beta \top \beta) = \alpha \cap \beta, \tag{1.111}$$

$$\alpha \top I = \emptyset, \tag{1.112}$$

$$\alpha \top \emptyset = \bar{\alpha}, \tag{1.113}$$

$$\alpha \top \bar{\alpha} = \emptyset. \tag{1.114}$$

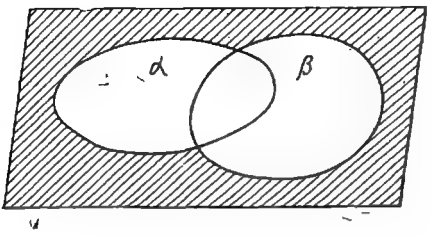


Fig. 30

Funcția majoritară. Se definește (fig. 31) funcția majoritară

$$\alpha \# \beta \# \gamma = (\alpha \cap \beta) \cup (\beta \cap \gamma) \cup (\gamma \cap \alpha). \tag{1.115}$$

Proprietăți ale funcției majoritare

$$\alpha \# \beta \# \gamma \text{ } \textit{e simetrică în } \alpha, \beta, \gamma. \tag{1.116}$$

$$\alpha \# \beta \# \emptyset = \alpha \cap \beta, \tag{1.117}$$

$$\alpha \# \beta \# \gamma = (\alpha \cup \beta) \cap (\beta \cup \gamma) \cap (\gamma \cup \alpha), \tag{1.118}$$

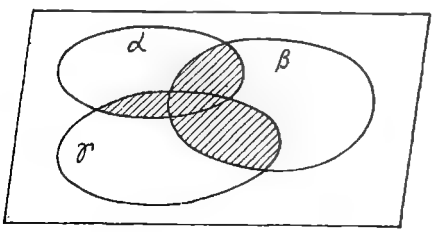


Fig. 31

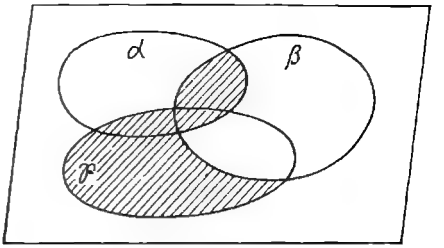
$$\alpha \# \beta \# I = \alpha \cup \beta, \tag{1.119}$$

$$\alpha \# \beta \# \bar{\beta} = \alpha. \tag{1.120}$$

Disjuncția condiționată *. Se definește (fig. 32) funcția (α, β, γ) prin

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha \cap \beta) \cup (\bar{\beta} \cap \gamma). \qquad (1.121)$$

Fig. 32



Proprietăți ale disjuncției condiționate

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (\beta \to \alpha) \cap (\bar{\beta} \to \gamma), \qquad (1.122)$$

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha \cup \bar{\beta}) \cap (\gamma \cup \beta). \qquad (1.123)$$

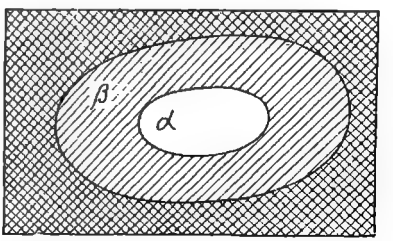
FORMA ARISTOTELICĂ A JUDECĂȚILOR

Teorema I. *Următoarele condiții sînt echivalente*

I. 1 $\alpha \subset \beta$

I. 2 $\bar{\alpha} \supset \bar{\beta}$

Fig. 33



* Sau funcția lui Church.

I.3 $\alpha \cap \beta = \alpha$,

I.4 $\alpha \cup \beta = \beta$,

I.5 $\alpha \cap \bar{\beta} = \emptyset$,

I.6 $\bar{\alpha} \cup \beta = I$,

I.7 $\alpha - \beta = \emptyset$,

I.8 $\alpha \rightarrow \beta = I$,

I.9 $\beta \quad \alpha = I$,

I.10 $\bar{\alpha} \top \beta = \emptyset$,

I.11 $\alpha \perp \bar{\beta} = I$.

I.1 se enunță:

A. toți α sînt β.

Acesta este tipul de propoziție universală (fiindcă α este luat în universalitatea lui) afirmativă.

Evident, propoziția universal-negativă:

E. nici un α nu este β

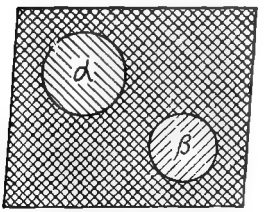


Fig. 34

spune că α și β sînt disjuncte

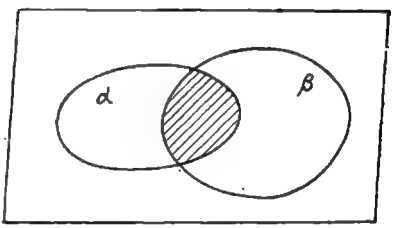
$$\alpha \cap \beta = \emptyset,$$

deci este de tipul I.5, $\bar{\beta}$ fiind înlocuit cu β, deci β cu $\bar{\beta}$;

deci ca este echivalentă cu

$$\alpha \subset \bar{\beta},$$
$$\bar{\alpha} \supset \beta,$$
$$\alpha \cap \bar{\beta} = \alpha,$$
$$\alpha \cup \bar{\beta} = \bar{\beta},$$
$$\bar{\alpha} \cup \bar{\beta} = I,$$
$$\alpha - \bar{\beta} = \emptyset,$$
$$\alpha \to \bar{\beta} = I,$$
$$\bar{\beta} \quad \alpha = I,$$
$$\bar{\alpha} \top \bar{\beta} = \emptyset,$$
$$\alpha \perp \beta = I.$$

Fig. 35



Teorema II. *Următoarele condiții sînt echivalente*:

II.1 $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$,

II.2 $\bar{\alpha} \cup \bar{\beta} \neq I$,

II.3 $\alpha \not\subset \bar{\beta}$,

II.4 $\beta \not\subset \bar{\alpha}$

II.5 $\alpha \cap \bar{\beta} \neq \alpha$

II.6 $\alpha \cup \bar{\beta} \neq \bar{\beta}$,

II.7 $\alpha - \bar{\beta} \neq \emptyset$,

II.8 $\alpha \to \bar{\beta} \neq I$,

II.9 $\bar{\beta} \quad \alpha \neq I$,

II.10 $\bar{\alpha} \top \bar{\beta} \neq \emptyset$,

II.11 $\alpha \perp \beta \neq I$.

Am notat $\alpha \not\subset \beta$ și $\beta \not\supset \alpha$ pentru: α nu e cuprinsă în β. Acesta este tipul de propoziție particular-afirmativă:

I. Există unii α care să fie și β,
sau, cum se spune uneori:

Unii α sînt β.

Evident, propoziția particular-negativă:
O. Există unii α care să nu fie și β,
sau, cum se mai spune uneori:

Unii α nu sînt β

se scrie

$$\alpha \cap \bar{\beta} \neq \emptyset,$$

deci:

$$\bar{\alpha} \cup \beta \neq I,$$

$$\alpha \not\subset \beta,$$

$$\bar{\beta} \not\subset \bar{\alpha},$$

$$\alpha \cap \beta \neq \alpha,$$

$$\alpha \cup \beta \neq \beta,$$

$$\alpha - \beta \neq \emptyset,$$

$$\alpha \to \beta \neq 1$$

$$\bar{\alpha} \top \beta \neq \emptyset$$

$$\alpha \perp \bar{\beta} \neq I.$$

II

Algebra relațiilor

RELAȚII BINARE

Ideea de relație binară este întrebuințată de cititori încă de la începutul studiilor lor; exemple de relații

$$=, \neq, <, \leqslant, >, \geqslant, \in, \notin, \subset, \supset, \not\subset, \not\supset,$$

$\|$ (e paralel cu), $|$ (divide).

În mod obișnuit, dacă R este o relație, aRb înseamnă că: *individul a este în relația R cu individul b.*

Implicația relațiilor

Șirul de semne

$$R \Rightarrow S$$

înseamnă:

ori de cîte ori aRb avem și aSb.

Exemple: $= \Rightarrow \leqslant$, $= \Rightarrow \geqslant$, $< \Rightarrow \leqslant$, $> \Rightarrow \geqslant$, $< \Rightarrow \neq$, $> \Rightarrow \neq$, $= \Rightarrow \subset$ (egalitatea claselor implică incluziunea lor).

Se deduce că implicația relațiilor este *reflexivă*

$$R \Rightarrow R \tag{2.1}$$

și *tranzitivă*,

dacă $R \Rightarrow S$ și $S \Rightarrow T$, *atunci* $R \Rightarrow T$. (2.2)

Conjuncția relațiilor

Dacă S și T sînt două relații, numim conjuncția lor și notăm cu

$$S \,\&\, T$$

relația dintre a și b, definită prin:

$$a\,(S\&T)\,b,$$

înseamnă

$$a\,S\,b \quad \text{și} \quad a\,T\,b.$$

Exemple pentru numere $=$ este $\leqslant$ & $\geqslant$; $>$ este $\geqslant$ & $\neq$; $<$ este $\leqslant$ & $\neq$; pentru mulțimi $=$ este $\subset$ & $\supset$.

Este vizibil că

$$S\&T \Rightarrow S, \tag{2.3}$$
$$S\&T \Rightarrow T,$$

căci dacă avem și aST și aTb, atunci avem aSb și la fel avem aTb,

$$\text{dacă } R \Rightarrow S \text{ și } R \Rightarrow T, \text{ atunci } R \Rightarrow S\&T, \tag{2.4}$$

căci din aRb deducem aSb și aTb.

Echivalența relațiilor

Dacă avem

$$R \Rightarrow S \quad \text{și} \quad S \Rightarrow R,$$

spunem că are loc echivalența relațiilor R și S (sau R și S sînt echivalente) și notăm

$$R \Leftrightarrow S.$$

Este vizibil că echivalența relațiilor este *reflexivă*:

$$R \Leftrightarrow R, \tag{2.5}$$

simetrică

$$\text{dacă } R \Leftrightarrow S, \text{ atunci } S \Leftrightarrow R \tag{2.6}$$

și tranzitivă

$$\text{dacă } R \Leftrightarrow S \text{ și } S \Leftrightarrow T, \text{ atunci } R \Leftrightarrow T. \tag{2.7}$$

Demonstrațiile ca exercițiu.

Avînd definită echivalența, putem pune în evidență unele proprietăți ale conjuncției.

Proprietăți ale conjuncției.

Conjuncția relațiilor este *idempotentă*:

$$R\&R \Leftrightarrow R, \tag{2.8}$$

comutativă:

$$R\&S \Leftrightarrow S\&R \tag{2.9}$$

și asociativă:

$$R\&(S\&T) \Leftrightarrow (R\&S)\&T. \tag{2.10}$$

Demonstrațiile ca exercițiu; de exemplu,

$$a[R\&(S\&T)]b,$$

înseamnă

$$aRb \text{ și } a(S\&T)b,$$

Dar $a(S\&T)b$ înseamnă aSb și aTb, deci $a[R\&(S\&T)]b$ înseamnă aRb și aSb și aTb. Deoarece $a[(R\&S)\&T]b$ înseamnă $a(R\&S)b$ și aTb, iar $a\ (R\&S)b$ înseamnă aRb și aSb, deducem că $a[(R\&S)\&T]b$ înseamnă aRb și aSb, și aTb. Deci $a[R\&(S\&T)]b$ și $a[(R\&S)\&T]b$ înseamnă amîndouă același lucru, și anume aRb și aSb și aTb.

Deci dacă $a[R\&(S\&T)]b$, atunci $a[(R\&S)\&T]b$, deci $R\&(S\&T) \Rightarrow (R\&S)\&T$ și $(R\&S)\ \&T \Rightarrow R\&(S\&T)$, deci teorema.

Negația unei relații

Numim negația lui R și notăm cu $\not R$ (sau $\bar{R}$) relația dintre a și b definită astfel

$$a\ \bar{R}\ b$$

înseamnă a nu este în relația R cu b.

Exemple:

negația relației $<$ este $\geqslant$,
negația relației $>$ este $\leqslant$,
negația relației $\leqslant$ este $>$
negația relației $\geqslant$ este $<$,
negația relației $\in$ este $\notin$
negația relației $\notin$ este $\in$

negația relației $=$ este $\neq$,

negația relației $\neq$ este $=$

Disjuncția relațiilor

Fiind date relațiile S, T numim disjuncția lor și notăm cu

$$S \vee T$$

relația dintre a și b definită astfel :

$$a(S \vee T)b,$$

înseamnă :

> măcar una din relațiile aSb sau aTb este adevărată.

Exemple :

$$\leqslant \text{ este } < \vee =$$

$$\geqslant \text{ este } > \vee =$$

Proprietăți ale disjuncției

$$S \Rightarrow S \vee T, \tag{2.11}$$

$$T \Rightarrow S \vee T,$$

$$\text{dacă } S \Rightarrow R \text{ și } T \Rightarrow R, \text{ atunci } S \vee T \Rightarrow R, \tag{2.12}$$

$$R \vee R \Leftrightarrow R, \tag{2.13}$$

$$S \vee T \Leftrightarrow T \vee S, \tag{2.14}$$

$$R \vee (S \vee T) \Leftrightarrow (R \vee S) \vee T \tag{2.15}$$

2.13, 2.14, 2.15 sînt legile de idempotență, de comutativitate și de asociativitate ale disjuncției.

Proprietăți ale disjuncției și conjuncției

$$R\&(R \vee S) \Leftrightarrow R, \tag{2.16}$$

$$R \vee (R\&S) \Leftrightarrow R, \tag{2.17}$$

$$R\&(S \vee T) \Leftrightarrow (R\&S) \vee (R\&T), \tag{2.18}$$

$$R \vee (S\&T) \Leftrightarrow (R \vee S)\&(R \vee T). \tag{2.19}$$

2.16, 2.17 sînt legile de absorbție, 2.18, 2.19 legile de distributivitate.

Demonstrațiile ca exercițiu. Ca exemplu să demonstrăm 2.18. Dacă $a[R\&(S \vee T)]b$, atunci aRb și $a(S \vee T)b$, deci aRb și: sau aSb, sau măcar aTb; deci sau aRb și aSb, sau măcar aRb și aTb. În primul caz, $a(R\&S)b$, iar în al doilea, $a(R\&T)b$; deci $R\&(S \vee T) \Rightarrow (R\&S) \vee (R\&T)$.

Dacă $a[(R\&S) \vee (R\&T)]b$, atunci sau $a(R\&S)b$, sau măcar $a(R\&T)b$, deci măcar unul din cazurile următoare:

1) și aRb și aSb;

2) și aRb și aTb.

În amîndouă cazurile aRb și, în primul caz, aSb, iar în al doilea, aTb, deci $a(S \vee T)b$, deci aRb și $a(S \vee T)b$. Deci $a[R\&(S \vee T)]b$, deci $(R\&S) \vee (R\&T) \Rightarrow R\&(S \vee T)$. Deci 2.18 este dovedită.

Produsul relațiilor

Produsul $S.T$ a doua relații S, T este definit astfel:

$$a(S.T)b$$

înseamnă că

există un z astfel ca aSz și zTb.

Exemple:

1. $= \quad \in \Leftrightarrow \in$

căci dacă există un z cu $a = z$ și $z \in \alpha$, atunci $a \in \alpha$, deci $= . \in \Rightarrow \in$; dacă $a \in \alpha$, există un z (și anume a), astfel ca $a = z$ și $z \in \alpha$, deci $\in \Rightarrow = \quad \in$;

2. $\in \quad = \Leftrightarrow \in$

Demonstrația ca exercițiu.

3. $= \quad = \Leftrightarrow =$

Dacă există un z cu $a = z$ și $z = b$, atunci $a = b$, deci $= . = \Rightarrow =$ Dacă $a = b$, există un z, și anume acest z este a, cu $a = z$ și $z = b$, deci $= \Rightarrow = \quad =$

4. $\subset \quad \subset \Rightarrow \subset$,

5. $= \quad \subset \Leftrightarrow \subset$

6. $\subset \ = \Leftrightarrow \subset$,

7. $= \cdot \leqslant \Leftrightarrow \leqslant$,

8. $\leqslant \ = \Leftrightarrow \leqslant$,

9. $\geqslant \cdot = \Leftrightarrow \geqslant$, $= \ \geqslant \Leftrightarrow \geqslant$,

10. $< \ < \Rightarrow <$,

11. $|| \ || \Rightarrow ||$,

12. $| \ | \Rightarrow |$

Demonstrațiile ca exercițiu.

*Proprietățile produsului**

$$(R.S) \ . \ T \Leftrightarrow R \ .(S.T), \tag{2.19}$$

căci $a[(R \ . \ S) \ T]b$ înseamnă că există un y cu $a(R.S)y$ și yTb, deci că există un x cu aRx și xSy, deci că există x și y cu aRx, xSy, yTb, deci că există un x cu aRx și $x(S.T)b$, deci $a[R.(S.T)]b$, deci

$$(R.S) \ . \ T \Rightarrow R.(S.\mathrm{T}).$$

Analog arătăm că:

$$R.(S.T) \Rightarrow (R.S).T,$$

$$R.(S \vee T) \Leftrightarrow (R.S) \vee (R.T). \tag{2.20}$$

Dacă $a[R.(S \vee T)]b$, atunci există un x cu aRx și $x(S \vee T)b$, deci xSb sau măcar xTb.

Deci se prezintă unul măcar din următoarele cazuri: sau 1) aRx și xSb sau măcar 2) aRx și xTb. Deci: 1) $a(R.S)b$ sau măcar 2) $a(R.T)b$ deci $R.(S \vee T) \Rightarrow (R.S) \vee (R.T)$. Analog $a[(R.S) \vee (R.T)]b$ dă: 1) $a(R.S)b$, deci există un x cu aRx și xSb sau măcar 2) $a(R.T)b$, deci există un y cu aRy și yTb, deci în amîndouă cazurile există un z care dă în același timp aRz precum și unul din cazurile zSb sau măcar zTb, deci $z(S \vee T)b$, deci $a[R.(S \vee T)]b$, deci $(R.S) \vee (R.T) \Rightarrow R(S \vee T)$

$$(R \vee S).T \Leftrightarrow (R.T) \vee (S.T), \tag{2.21}$$

$$R.(S\&T) \Rightarrow (R.S)\&(R.T), \tag{2.22}$$

$$(R\&S).T \Rightarrow (R.T)\&(S.T). \tag{2.23}$$

* Vezi p. 197.

Transpusa unei relații R este relația $\breve{R}$ — adeseori notată $\check{R}$ — definită prin:

$$x\breve{R}y \text{ înseamnă } yRx.$$

Proprietăți ale transpusei

$$\breve{\breve{R}} \Leftrightarrow R, \tag{2.24}$$

$$\widecheck{R\&S} \Leftrightarrow \breve{R}\&\breve{S}, \tag{2.25}$$

$$\widecheck{R \vee S} \Leftrightarrow \breve{R} \vee \breve{S}, \tag{2.26}$$

$$\text{dacă } S \Leftrightarrow R, \text{ atunci } \breve{S} \Leftrightarrow \breve{R}, \tag{2.27}$$

$$\widecheck{RS} \Leftrightarrow \breve{S}\,\breve{R} \tag{2.28}$$

Demonstrațiile ca exercițiu.

Exerciții

1. Care este transpusa relației: $<, \leqslant, >, \geqslant, =, \neq, \subset, \supset, \parallel, \mid$
2. Care sînt analogele proprietăților 1.1—1.19, 1.33—1.36 1.37—1.41, 1.43—1.123 pentru relații.
3. Se notează

$$R^1 \Leftrightarrow R, \qquad R^{n+1} \Leftrightarrow RR^n.$$

Să se arate că $R^m R^n \Leftrightarrow R^{m+n}$.

Observații

1. Analoga mulțimii vide este relația vidă, care este relația R pentru care, oricare ar fi x,y nu avem xRy; analoga mulțimii totale este relația totală R, astfel că xRy este valabilă, oricare ar fi x și y.

2. O relație R este definită între elementele a două mulțimi α, β; cu alte cuvinte relația aRb are sens cînd $a \in \alpha$ și $b \in \beta$ dar nu are sens nici dacă $a \notin \beta$, nici dacă $b \notin \beta$. De pildă relația $a < b$ are sens cînd a și b sînt numere reale dar nu are sens cînd a e un număr complex sau cînd b e un vector.

Vom numi pe α *domeniul* relației R și pe β *codomeniul* acestei relații; relația aRb nu va avea sens decît dacă $a \in \alpha$ și $b \in \beta$. În cazul relației „$<$“ domeniul α și codomeniul β sînt identice, $\alpha = \beta$, și anume sînt mulțimea numerelor reale. În cazul relațiilor „$\in$“ și „$\notin$“ propoziția $a \in \mu$ nu are sens decît dacă a este un individ și μ este o mulțime (vezi și Cap. IV) deci domeniile relațiilor „$\in$“ și „$\notin$“ sînt mulțimea I a tuturor indivizilor, în timp ce codomeniile lor sînt mulțimea tuturor submulțimilor lui I.

Relația de identitate $=$ se bucură de următoarele proprietăți:

α) *reflexivitatea*: oricare ar fi x avem

$$x = x \tag{3.1}$$

β) *simetria*: oricare ar fi x și y,

$$\text{dacă } x = y, \text{ atunci } y = x; \tag{3.2}$$

γ) *tranzitivitatea*: oricare ar fi x, y, z,

$$\text{dacă } x = y \text{ și } y = z, \text{ atunci } x = z; \tag{3.3}$$

δ) *compatibilitatea*: dacă

$$x = x^*, \quad y = y^* \quad \text{și} \quad xRy \tag{3.4}$$

atunci

$$x^* \; R \; y^*.$$

Proprietatea β se scrie:

$$\cong \Leftrightarrow =$$

Proprietatea γ dă:

$$= \quad = \Rightarrow =.$$

Proprietatea δ dă pentru orice relație

$$= R \Rightarrow R,$$
$$R = \Rightarrow R,$$
$$= R = \Rightarrow R,$$

căci $a(= R)b$ înseamnă că există z cu $a = z$, zRb, deci înseamnă aRb; dacă aRb, atunci $a = a$, aRb deci $R \Rightarrow = R$. Analog în celelalte cazuri.

Relația de egalitate* între mulțimi a fost definită la p. 9: $\alpha = \beta$ înseamnă că α și β au aceleași elemente. Pentru această relație proprietățile de reflexivitate (α și α au aceleași elemente, ceea ce este o tautologie), de simetrie (dacă α și β au aceleași elemente, atunci β și α au aceleași elemente), de tranzitivitate (dacă α și β au aceleași elemente și dacă β și γ au aceleași elemente, atunci α și γ au aceleași elemente) și de compatibilitate (dacă

* Vezi p. 197.

α și α^* au aceleași elemente și dacă β și β^* au aceleași elemente, atunci orice relație satisfăcută de α și β este satisfăcută de α^* și β^*) sînt consecințe ale definiției date.

Vom observa că echivalența relațiilor joacă în algebra relațiilor același rol pe care-l joacă egalitatea mulțimilor în algebra mulțimilor.

Proprietățile de reflexivitate, de simetrie și de tranzitivitate ale relației $\Leftrightarrow$ între relații au fost puse în evidență la p. 38.

O proprietate de compatibilitate ar fi enunțată sub forma:

Dacă $R \Leftrightarrow S$, atunci orice proprietate a lui R este o proprietate a lui S; despre o astfel de propoziție vom vorbi la p. 175.

RELAȚII DE PREORDINE

O relație R este numită *reflexivă* dacă oricare ar fi x

$$xRx,$$

deci, dacă

$$= \Rightarrow R.$$

O relație R este numită *tranzitivă* dacă din aRb și bRc deducem aRc.

O relație de preordine este o relație reflexivă și tranzitivă; pentru o astfel de relație avem:

$$R^2 \Leftrightarrow R,$$

căci dacă aR^2b, atunci există un z cu aRz și zRb și atunci din cauza tranzitivității, aRb, deci $R^2 \Rightarrow R$.

Dar dacă aRb din cauza reflexivității aRa, deci există un z și anume $z = a$ cu aRz și zRb, deci $R \Rightarrow R^2$, deci $R^2 \Leftrightarrow R$.

Reciproc, dacă $R^2 \Leftrightarrow R$, atunci $R^2 \Rightarrow R$, deci dacă aRb și bRc există un z, și anume $z = b$, astfel ca aRz și zRc, deci aR^2c, deci aRc, deci R este tranzitivă.

Deci *relațiile de preordine R se pot caracteriza prin*

$$= \Rightarrow R, \tag{4.1}$$

$$R^2 \Leftrightarrow R, \tag{4.2}$$

Exemple: $\subset$, $\supset$, $\leqslant$, $\geqslant$, $\parallel$, $|$

RELAȚII DE ECHIVALENȚĂ

O relație E este numită relație de echivalență dacă este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

Exemple de relații de echivalență $\parallel$, $\equiv (\mathrm{mod}\ m)$ pentru întregii pozitivi, negativi și nuli, relația de egalitate pentru triunghiuri, relația de similitudine pentru triunghiuri sau alte figuri, relația de echivalență pentru segmente ($AB \sim CD$ înseamnă că $ABCD$ este un paralelogram, eventual degenerat, fig. 36 a,b,c,d).

Relația de echivalență afină pentru triunghiuri sau alte figuri plane este o relație de echivalență (fiecărui punct A din planul P îi corespunde punctul A' din planul P, astfel ca $A'B'$ ...să provină din AB ...printr-o transformare afină).

Relațiile de echivalență fiind relații de preordine simetrice, pot fi caracterizate prin

$$= \Rightarrow E, \tag{4.1}$$

$$\widetilde{E} \Leftrightarrow E \tag{4.3}$$

$$E^2 \Leftrightarrow E \tag{4.2}$$

Clase de echivalență. Fie M o mulțime dată; E o relație de echivalență definită pentru elementele lui M.

Dacă $a \in M$, vom numi $\hat{a}$ mulțimea tuturor elementelor x echivalente cu a, deci $x \in \hat{a}$ înseamnă xEa.

$\hat{a} = \hat{b}$ *echivalează cu* aEb. Dacă $\hat{a} = \hat{b}$, atunci $\hat{a} \subset \hat{b}$ și $\hat{b} \subset \hat{a}$. Dar $b \in \hat{b}$, deci $b \in \hat{a}$; deci bEa, deci aEb. Dacă aEb, atunci $a \in \hat{b}$ și dacă aEb, atunci bEa, deci $b \in \hat{a}$. Dar dacă $a \in \hat{b}$ și $x \in \hat{a}$, atunci aEb și xEa, deci xEb, deci $x \in \hat{b}$, deci $\hat{a} \subset \hat{b}$; la fel $\hat{b} \subset \hat{a}$, deci $\hat{a} = \hat{b}$.

$\hat{a} = \hat{b}$ *echivalează cu*, $\hat{a} \cap \hat{b} \neq \emptyset$. Dacă $\hat{a} = \hat{b}$, deoarece $a \in \hat{a}$, avînd $a \in \hat{b}$, $\hat{a} \cap \hat{b}$ conține pe a, deci $\hat{a} \cap \hat{b} \neq \emptyset$. Dacă $\hat{a} \cap \hat{b} \neq \emptyset$, atunci există $x \in \hat{a}$, $x \in \hat{b}$, deci xEa, xEb, deci aEx, xEb, deci aEb, deci $\hat{a} = \hat{b}$.

$\hat{a} = \hat{b}$ *sau* $\hat{a} \cap \hat{b} = \emptyset$, căci $\hat{a} \cap \hat{b} = \emptyset$ sau $\hat{a} \cap \hat{b} \neq \emptyset$, în care caz $\hat{a} = \hat{b}$.

Numim $M/_E$ *(mulțime cît)* mulțimea claselor $\hat{a}$ cu $a \in M$.

Oricare ar fi $a \in M$, *există* $\alpha \in M/_E$ *cu* $a \in \alpha$; este destul să luăm $\alpha = \hat{a}$.

Definiții prin abstracție. Formarea mulțimii cît $M/_E$ constituie un puternic mijloc de a defini noi idei matematice; acest procedeu este numit definiția prin abstracție. Iată cîteva exemple

Ideea de direcție. Fie $\parallel$ relația de paralelism a două drepte $\parallel$ este o relație de echivalență. Dacă a este o dreaptă, $\hat{a}$ este mulțimea tuturor dreptelor paralele cu a. Ceea ce au comun aceste drepte este direcția lor. Aici cuvîntul „direcție" nu este încă definit. Putem să procedăm astfel. Vom numi „direcții" clasele de echivalență în raport cu relația de paralelism a dreptelor. A spune că direcția dreptei a este α înseamnă a spune că $a \in \alpha$, α fiind o astfel de clasă de echivalență, deci $\alpha \subset \Delta$, unde Δ este mulțimea dreptelor.

Ideea de vector. Se numește „segment" orice pereche ordonată (A,B) de puncte. Printre segmente se socotesc și segmentele nule cu $A = B$. Relația de echipolență $AB \sim CD$ definită prin „$ABCD$ este un paralelogram propriu sau degenerat" împarte segmentele în clase de echivalență numite *vectori*. A spune $AB \in \vec{v}$, $CD \in \vec{v}$ înseamnă a spune că $AB \sim CD$. Clasa de echivalență ce conține segmentul AB va fi numit *vectorul* $\vec{AB}$.

Ideea de formă a unei figuri. Fie M o figură, adică o mulțime de puncte. Vom spune că două figuri M și M' sînt *asemenea*, dacă fiecărui punct A din M îi corespunde un punct A' din M', astfel ca două triunghiuri, și anume

triunghiul ABC, format din puncte din M, şi $A'B'C'$, format cu punctele corespunzătoare din M' să fie întotdeauna asemenea.

Relaţia de asemănare $M \sim M'$ a două figuri este o relaţie de echivalenţă căci:

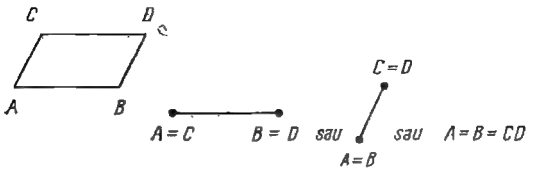


Fig. 36

α) orice figură este asemenea cu ea însăşi;

β) dacă $M \sim M'$ atunci şi $M' \sim M$;

γ) dacă $M \sim M'$ şi $M' \sim M''$, atunci şi $M \sim M''$ (demonstraţia ca exerciţiu).

Clasele de echivalenţă sînt formate din figuri care au aceeaşi formă (fără să aibă neapărat aceeaşi mărime). Cuvîntul „formă" întrebuinţat în limba română poate fi definit precis: numim formă o clasă de echivalenţă în raport cu relaţia de asemănare.

Ideea de clasă de resturi. Se spune că doi întregi * a, b sînt congruenţi faţă de un întreg m, ceea ce se scrie:

$$a \equiv b \pmod{m},$$

dacă există un întreg k astfel ca

$$a - b = km.$$

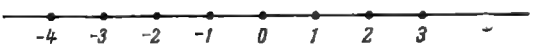


Fig. 37

Întregii se pot reprezenta prin puncte echidistante pe o dreaptă.

Dacă dreapta este înfăşurată în mod convenabil, for-

* Prin numere întregi se înţeleg numerele întregi pozitive sau negative şi zero.

mînd o elice pe un cilindru, numerele congruente se vor afla pe o aceeași generatoare, deci vor avea aceeași proiecție pe cercul bază al cilindrului.

O clasă de echivalență pentru relația „$\equiv (\mathrm{mod}\ m)$" va fi formată din punctele de pe o generatoare.

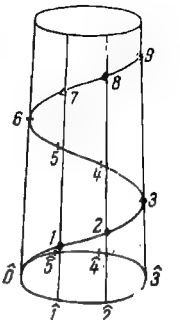


Fig. 38

RELAȚII DE ORDINE

O relație se numește *antisimetrică* dacă

din $a\ R\ b$ *și* $b\ R\ a$ *deducem* $a = b$

și se numește *strict antisimetrică* dacă nu avem niciodată

$$a\ R\ b \quad \text{și} \quad b\ R\ a$$

deci, dacă

($a\ R\ b$) *și* ($b\ R\ a$) *nu e niciodată adevărată.*

O relație reflexivă, tranzitivă și antisimetrică se numește relație de ordine parțială; deci condițiile necesare și suficiente ca relația R să fie o relație de ordine parțială sînt:

$$= \Rightarrow R, \tag{4.1}$$

$$R^2 \Leftrightarrow R, \tag{4.2}$$

$$(R \& \widetilde{R}) \Leftrightarrow =. \tag{4.4}$$

O relație se numește *ireflexivă* dacă

$a\ R\ a$ nu e niciodată adevărată

deci, dacă

$$R \Rightarrow \neq \tag{4.5}$$

Dacă R este o relație vom numi $R^{\wedge}$ și $R^{\vee}$ relațiile

$$R^{\wedge} \Leftrightarrow R \vee =$$

$$R^{\vee} \Leftrightarrow R \,\&\, \neq$$

Dacă R este o relație de ordine parțială, $R^{\vee}$ este ireflexivă, tranzitivă și strict antisimetrică, căci $a\ R^{\vee}\ b$ implică $a \neq b$, $a\ R^{\vee}\ b$ și $b\ R^{\vee}\ c$ implică $a\ R\ b$ și $b\ R\ c$ deci, R fiind tranzitivă, $a\ R\ c$; dar în acest caz $a = c$ implică $a\ R\ b$ și $b\ R\ a$, deci $a\ R\ b$ deci $a = b$ contrar lui $a\ R^{\vee}\ b$ (care implică $a \neq b$), deci $a \neq c$, deci $a\ R^{\vee}\ c$, deci R este tranzitivă; $a\ R^{\vee}\ b$ și $b\ R^{\vee}\ a$ dau, din cauza tranzitivității, $a\ R^{\vee}\ a$, deci $a \neq a$, ceea ce este absurd, deci $R^{\vee}$ este strict antisimetrică.

O relație ireflexivă, tranzitivă, strict antisimetrică va fi numită *relație de ordine parțială strictă*. Teorema de mai sus se enunță deci

Dacă R e o relație de ordine parțială, $R^{\vee}$ e o relație de ordine parțială strictă.

Dacă R e o relație de ordine parțială, $R^{\wedge}$ e o relație de ordine parțială.

Într-adevăr, $a = a$ deci $a\ R^{\wedge}\ a$; $R^{\wedge}$ e tranzitivă, căci $(R^{\wedge})^2 \Leftrightarrow (R \vee =)^2 \Leftrightarrow (R \vee =)(R \vee =) \Leftrightarrow R^2 \vee (R =) \vee (R =) \vee (=)^2 \Leftrightarrow R^2 \vee R \vee R \vee = \quad$ Dar $R^2 \Rightarrow R$, deci $(R^{\wedge})^2 \Rightarrow R \vee = \Rightarrow R^{\wedge}$. Arătăm că $R^{\wedge}$ e antisimetrică: $(R^{\wedge}) \Leftrightarrow \widetilde{R \vee =} = \widetilde{R} \vee \widetilde{=} \Leftrightarrow \widetilde{R} \vee = \Leftrightarrow R \vee = \Leftrightarrow R^{\wedge}$

Dacă R e relația $\leqslant$ sau $\geqslant$, atunci $R^{\vee}$ e relația $<$ sau $>$; dacă R e relația $<$ sau $>$ $R^{\wedge}$ e relația $\leqslant$ sau $\geqslant$

Oricare ar fi relația R, avem

$$R^{\vee\wedge} \Leftrightarrow R^{\wedge},$$

$$R^{\wedge\vee} \Leftrightarrow R^{\vee},$$

$$R^{\vee\vee} \Leftrightarrow R^{\vee}$$

$$R^{\wedge\wedge} \Leftrightarrow R^{\wedge},$$

căci $R^{\vee\wedge} \Leftrightarrow R^{\vee} \bigvee = \Leftrightarrow (R \& \neq) \bigvee = \Leftrightarrow (R \bigvee =) \& (\neq \bigvee =) \Leftrightarrow R \bigvee = \Leftrightarrow R^{\wedge}$; $R^{\wedge\vee} \Leftrightarrow R^{\wedge} \& \neq \Leftrightarrow (R \bigvee =) \neq \Leftrightarrow (R \& \neq) \bigvee (= \& \neq) \Leftrightarrow R \& \neq \Leftrightarrow R^{\vee}$; $R^{\vee\vee} \Leftrightarrow R^{\vee} \& \neq \Leftrightarrow (R \& \neq) \& \neq \Leftrightarrow R \& (\neq \& \neq) \Leftrightarrow \Leftrightarrow R \& \neq \Leftrightarrow R^{\vee}$; $R^{\wedge\wedge} \Leftrightarrow R^{\wedge} \bigvee = \Leftrightarrow (R \bigvee =) \bigvee \Leftrightarrow \Leftrightarrow R \bigvee (= \vee =) \Leftrightarrow R \bigvee = \Leftrightarrow R^{\wedge}$.

PRODUS CARTEZIAN

Fie α', α'', două mulțimi și fie α mulțimea perechilor (a', a'') cu $a' \in \alpha'$, $a'' \in \alpha''$ Vom scrie

$$\alpha = \alpha' \times \alpha''$$

și vom spune că α este produsul cartezian al mulțimilor α și α''

De exemplu (fig. 39)

$$\alpha' = \{a', b', c'\}$$

$$\alpha'' = \{h'', k''\}$$

avem

$$\alpha = \{(a', h''), (b', h''), (c'h''), (a', k''), (b', k''), (c', k'')\}.$$

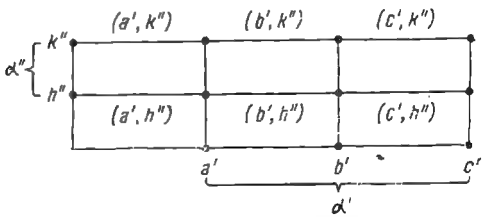


Fig. 39

Tot astfel avem produse carteziene în fig. 40 și 41.

Prin definiție $(a', b') = (a'', b'')$ înseamnă $a' = a''$ și $b' = b''$

Prin definiție

$$\alpha^2 = \alpha \times \alpha.$$

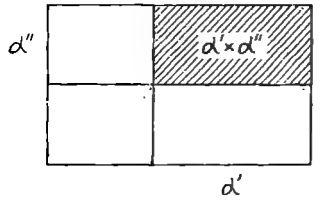


Fig. 40

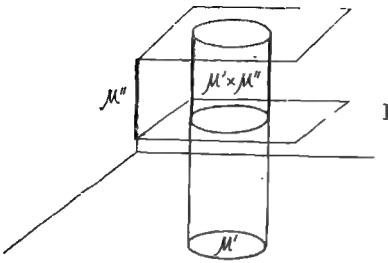


Fig. 41

Proprietăți ale produsului cartezian

$$\alpha \times (\beta \cup \gamma) = (\alpha \times \beta) \cup (\alpha \times \gamma), \qquad (2.29)$$

$$(\alpha \cup \beta) \times \gamma = (\alpha \times \gamma) \cup (\beta \times \gamma), \qquad (2.30)$$

$$\alpha \times (\beta \cap \gamma) = (\alpha \times \beta) \cap (\alpha \times \gamma), \qquad (2.31)$$

$$(\alpha \cap \beta) \times \gamma = (\alpha \times \gamma) \cap (\beta \times \gamma). \qquad (2.32)$$

Exerciții

1. $\varnothing \times \alpha = \varnothing$
2. $\alpha \times \varnothing = \varnothing$.
3. Dacă $\alpha \neq \varnothing$ și $\beta \neq \varnothing$, atunci $\alpha \times \beta \neq \varnothing$.
4. Este egalitatea $\alpha \times \beta = \beta \times \alpha$. adevărată?

Ce este o submulțime a lui $\alpha \times \beta$? Ea este o mulțime de perechi (a,b) cu $a \in \alpha$ și $b \in \beta$.

Fie $\rho \subset \alpha \times \beta$; vom scrie $a\ R\ b$, dacă și numai dacă $(a,b) \in \rho$. În acest mod:

submulțimile lui $\alpha \times \beta$ corespund relațiilor R între elementele lui α și ale lui β.

Vom numi μ_R submulțimea $\mu_R \subset \alpha \times \beta$ a tuturor perechilor $(a,b) \in \mu_R$ care sînt în relația R $a\,R\,b$.

Exemple. 1. Mulțimea Δ a elementelor lui $\alpha \times \alpha$ ce corespund relației $=$ este formată din perechile (a,a) cu $a \in \alpha$. Δ este numită *diagonala* lui $\alpha \times \alpha$ (fig. 42).

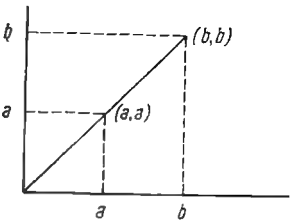


Fig. 42

2. Mulțimea $\mu_R \subset \mu_S$, dacă și numai dacă $R \Rightarrow S$, căci dacă $a\,R\,b$, atunci $(a,b) \in \mu_R$ și dacă $\mu_R \subset \mu_S$, atunci $(a,b) \in \mu_S$, deci $a\,S\,b$.

3. Mulțimile $\mu_R = \mu_S$, dacă și numai dacă $R \Leftrightarrow S$, căci $\mu_R = \mu_S$ înseamnă $\mu_R \subset \mu_S$ și $\mu_S \subset \mu_R$, deci $R \Rightarrow S$ și $S \Rightarrow R$, deci $R \Leftrightarrow S$.

4. $\mu_{R\&S} = \mu_R \cap \mu_S$, căci, $(a,b) \in \mu_{R\&S}$ înseamnă $a(R\&S)b$, deci $a\,R\,b$ și $a\,S\,b$, deci $(a,b) \in \mu_R$ și $(a,b) \in \mu_S$, deci $(a,b) \in \mu_R \cap \mu_S$.

5. $\mu_{R \vee S} = \mu_R \cup \mu_S$, căci $(a,b) \in \mu_{R \vee S}$ înseamnă $a(R \vee S)b$, deci $a\,R\,b$ sau măcar $a\,S\,b$, deci $(a,b) \in \mu_R$ sau măcar $(a,b) \in \mu_S$, deci $(a,b) \in \mu_R \cup \mu_S$.

6. $\mu_{\overline{R}} = \overline{\mu_R}$.

Exerciții

1. Dacă $\alpha \subset \beta$ și $\gamma \subset \delta$, atunci

$$\alpha \times \gamma \subset \beta \times \delta.$$

2. $(\alpha \times \beta) - (\gamma \times \delta) = ((\alpha - \gamma) \times \beta) \cup (\alpha \times (\beta - \delta))$.

Toate elementele unei mulțimi α au o proprietate comună, și anume aceea de a aparține acelei mulțimi; propoziția $a \in \alpha$ este o proprietate A a lui a; a spune

1. a aparține clasei α, ceea ce se scrie $a \in \alpha$;

2. a are proprietatea A, ceea ce vom scrie $A(a)$, este același lucru.

Dacă a,b sînt în relația R, $a\ R\ b$, vom scrie $R(a,b)$.

$A(x)$ și $R(x,y)$ sînt funcții care au ca variabile pe x și pe y, și care, dacă a sau a și b sînt indivizi, au ca valoare propozițiile

$$A(a),$$

$$R(a,b).$$

Putem concepe relații între 3,4...,n indivizi, care vor fi numite relații sau atribute sau predicate: ternare, quaternare, ..., n-are. $R(x,y)$ este un predicat sau o relație binară, $A(x)$ un predicat monar sau unar.

Exemple de relații ternare. Relația $S(a,b,c)$, cînd $a + b = c$, și relația $P(a,b,c)$ cînd $a\ b = c$.

Relația de ordine ciclică, cînd a,b,c sînt în această ordine în sensul direct pe cerc (fig. 43)

Relația de separație liniară a este între b și c (fig. 44).

Relația $a \equiv b \pmod{c}$.

Exemple de relații cuaternare Relația $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ definită prin $bd \neq 0$ *și* $ad = bc$.

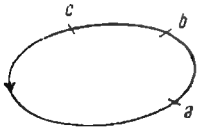


Fig. 43

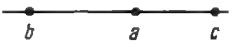


Fig. 44

Relația de echidistanță (fig. 45)

$$a - b = c - d$$

Relația de separație ciclică (fig. 46) bd separă pe ac.

Proprietatea de compatibilitate (3.4) de la p. 44 se extinde astfel

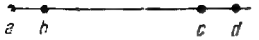


Fig. 45

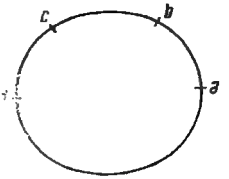


Fig. 46

Dacă R este o relație n-ară și dacă

$$a_1 = b_1,$$

$$a_n = b_n,$$

atunci dacă $a_1, \ldots, a_n$ sînt în relația R, atunci și $b_1, \ldots, b_n$ vor fi în relația R.

III

Funcții

DEFINIȚIA NOȚIUNII DE FUNCȚIE

Spunem că f este o funcție cu argumentul în mulțimea D și cu valorile în mulțimea C și scriem

$$f \quad D \to C$$

dacă f este o corespondență care face ca fiecărui $x \in D$ să-i corespundă un $y \in C$; scriem această corespondență

$$f(x) = y.$$

Numim:

D — domeniul funcției f;
C — codomeniul funcției f;
C^D — mulțimea funcțiilor cu domeniul D și codomeniul C; este deci echivalent a scrie

$$f \quad D \to C$$

sau

$$f \in C^D,$$

x — variabila independentă sau argumentul lui f;
y — variabila dependentă;
$f(x)$ — valoarea funcției f pentru valoarea x a argumentului:

$$x \dashrightarrow f(x).$$

Vom lua ca primitivă ideea exprimată de propoziția:
dăm valoarea c variabilei x (*)
în care $c \in \alpha$, α fiind domeniul de variație al variabilei x.

Se spune de obicei

$$\text{luăm } x = c \qquad (**)$$

dar trebuie observat că aici semnul „ = " nu are același înțeles ca în egalitatea $2 + 3 = 1 + 4$. Într-adevăr, proprietatea de simetrie a egalității ne permite ca, din $2 + 3 = 1 + 4$ să deducem că $1 + 4 = 2 + 3$; din contra, din „dăm lui x valoarea 3" nu putem deduce „dăm lui 3 valoarea x".

Uneori propoziția (*) este scrisă

$$x \doteq c \qquad (***)$$

Vom sublinia faptul că nu intră în definiția noțiunii de funcție *procedeul* prin care din c căpătăm pe $f(c)$.

Dacă domeniul este finit atunci $f(x)$ poate fi dată de un tabel sau de un desen. De pildă, graful din figura 47 ne definește o funcție care este dată de tabloul

x	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
$f(x)$	b_1	b_2	b_3	b_1	b_1	b_2

(****)

cu domeniul

$$X = (a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6)$$

și codomeniul

$$Y = (b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5)$$

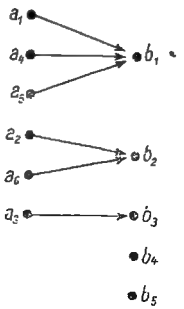


Fig. 47

Dacă domeniul este șirul numerelor naturale, un procedeu important de a defini o funcție este definiția recurentă $f(x)$ este definită prin sistemul de egalități

$$f(0) = a$$

$$f(n + 1) = \varphi[n, f(n)] \qquad (**)$$

Dacă domeniul este mulțimea numerelor reale sau complexe, un procedeu important de a defini o funcție este de a o defini ca funcție generată de o expresie, cum ar fi

$$\sqrt{x^2 - 1}, \quad \sin x, \quad \int_0^x f(x)\mathrm{d}x, \quad \zeta(x).$$

O tabelă, de exemplu o tablă de logaritmi, definește o funcție de o variabilă ce ia un număr finit de valori (intrările tabelei), care se extinde la o altă funcție de o variabilă reală prin diferite procedee de interpolare; o aceeași tabelă definește mai multe funcții după procedeul de interpolare întrebuințat.

Dacă o funcție ne este dată, ne sînt date domeniul și codomeniul său. De pildă funcția f cu domeniul $X = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$, cu codomeniul $(b_1, b_2, b_3, b_4 b_5)$ și cu corespondența dată de tabloul (****) de la p. 57 este altă funcție decît funcția f^* cu același domeniu X și cu codomeniul $Y^* = (b_1, b_2, b_3)$ în care $f^*(a_i) = f(a_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$; f și f^* nu sînt funcții identice, dar sînt funcții egale.

Așadar, avem două relații între funcții:

α) egalitatea $f = g$ definită mai sus prin

α' · domeniul lui f = domeniul lui g

α'' $f(x) = g(x)$ pentru orice x în domeniul comun al lui f și g.

β) identitatea definită prin

β' $f = g$

β'' codomeniul lui f = codomeniul lui g, deci prin α', α'' şi β''

Exerciţii

$$(Y \times Z)^X = Y^X \times Z^X,$$

$$(Z^Y)^X = Z^{X \times Y}.$$

Dacă c este un element dat şi dacă $c \in C$, funcţia

$$f_{D,c} \quad D \to C$$

care oricărui $x \in D$ face să-i corespundă elementul dat c, este numită *funcţia constantă* c.

Evident, dacă $D' \neq D''$

$$f_{D',c} \neq f_{D'',c}.$$

Numim $i_D \in D^D$ sau

$$i_D \quad D \to D,$$

funcţia care oricărui $x \in D$ face să-i corespundă acelaşi x:

$$i_D\ (x) = x,$$

i_D este numită *funcţia identică*.

Restricţia şi extensiunea unei funcţii. Valoarea $f(x)$ a funcţiei f este definită numai pentru $x \in D$. Fie $E \subset D$; numim *restricţia* lui f la E — funcţia definită pe $E \subset D$ care pe E ia aceleaşi valori cu f; o notăm $f_{|E}$

$$f_{|E} : E \to C$$

este definită prin:

$$\textit{pentru}\ \ x \in E,\ f_{|E}(x) = f(x).$$

Invers, dacă g este o funcţie definită pe mulţimea E,

$$g : E \to C$$

și dacă $D \supset E$, o funcție

$$f \quad D \to C$$

este numită *extensiunea* lui g, dacă g este restricția lui f pe E

$$g = f_{/E}.$$

Funcția caracteristică a unei mulțimi. Funcția caracteristică $f_A(x)$ a mulțimii A este definită prin

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } x \in A \\ 0 \text{ dacă } x \notin A \end{cases}$$

Deoarece $x \in D$, $f_A(x)$ are sens dacă $A \subset D$.

Funcția $f_D(x)$ este constanta 1; funcția $f_\varnothing(x)$ este constanta 0.

1. $f_{A \cap B}(x) = f_A(x) f_B(x)$

căci $f_A(x)\ f_B(x) = 1$, dacă și numai dacă $f_A(x) = f_B(x) = 1$, deci dacă și numai dacă $x \in A$ și $x \in B$, adică $x \in A \cap B$, adică $f_{A \cap B}(x) = 1$.

2. $f_{D-A}(x) = 1 - f_A(x)$

căci dacă $f_{D-A}(x) = 1$, atunci $x \in D - A$, deci $x \notin A$, deci $f_A(x) = 0$, deci $1 - f_A(x) = 1$, iar dacă $f_{D-A}(x) = 0$, atunci $x \notin D - A$; dar x este o valoare a variabilei independente a lui f_{D-A}, deci $x \in D$ și $x \in A$, deci $f_A(x) = 1$, deci $1 - f_A(x) = 0$.

3. $f_{A \cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) f_B(x)$.

Dacă $f_{A \cup B}(x) = 0$, atunci $x \notin A \cup B$, deci $x \notin A$ și $x \notin B$, deci $f_A(x) = f_B(x) = 0$, deci $f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) f_B(x) = 0$. Dacă $f_{A \cup B}(x) = 1$, atunci $x \in A \cup B$; trei cazuri sînt posibile, deoarece* $A \cup B = (A \cap B) \cup (A - B) \cup (B - A)$. Dacă

---

*Demonstrația ca exercițiu: $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) = (A \cap B) \cup (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A}) = [A \cap (B \cup \bar{B})] \cup [B \cap (A \cup \bar{A})] = A \cup B$

$x \in A \cap B$, atunci $x \in A$ și $x \in B$, deci $f_A(x) = f_B(x) = 1$, deci $f_A(x) + f_B(x) - f_A(x)\, f_B(x) = 1$. Dacă $x \in A - B$, atunci $x \in A$, și $x \notin B$, deci $f_A(x) = 1$, $f_B(x) = 0$, $f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) f_B(x) = 1$; analog, dacă $x \in B - A$. Deci în toate cazurile $f_{A \cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) f_B(x)$.

4. $f_{A \cup B}(x) \equiv f_A(x) + f_B(x) + f_A(x)\, f_B(x) \pmod 2$.
5. $f_{A-B}(x) = f_A(x) - f_A(x) f_B(x)$.
6. $f_{A+B}(x) \equiv f_A(x) + f_B(x) \pmod 2$.
7. $f_{A \mp B}(x) \equiv f_A(x) + f_B(x) + 1 \pmod 2$.
8. $f_{A \top B}(x) \equiv f_A(x)\, f_B(x) + f_A(x) + f_B(x) + 1 \pmod 2$.
9. $f_{A \perp B}(x) \equiv f_A(x) f_B(x) + 1 \pmod 2$

Deoarece fiecare submulțime A a lui D este caracterizată de funcția ei caracteristică

$$f_A : D \to (0,1)$$

mulțimea (0,1), avînd două elemente, va fi notată aici cu 2 și mulțimea submulțimilor lui D cu 2^D:

$$A \in 2^D \textit{ echivalează } \text{cu } A \subset D.$$

Extinderea unei funcții la o funcție de submulțimile domeniului

Fie

$$f \quad D \to C,$$

vom defini funcția $\hat{f}$

$$\hat{f} : 2^D \to 2^C$$

prin : dacă $A \in 2^D$, deci $A \subset D$, atunci

$$\hat{f}(A) = \mathcal{C}\{y \mid y = f(x), x \in A\}$$

deci $\hat{f}(A)$ este mulțimea tuturor valorilor $f(x)$ cînd $x \in A$.

1. $\hat{f}(A \cup B) = \hat{f}(A) \cup \hat{f}(B)$

căci $y \in \hat{f}(A \cup B)$ înseamnă $y = f(x)$, $x \in A \cup B$; dacă $x \in A$, $\hat{f}(x) \in f(A)$, deci $f(x) \in \hat{f}(A) \cup \hat{f}(B)$; analog, dacă $x \in B$, deci $\hat{f}(A \cup B) \subset \hat{f}(A) \cup \hat{f}(B)$.

Dacă $y \in \hat{f}(A)$, atunci $y = f(x)$ cu $x \in A$, deci $x \in A \cup B$, deci $y \in \hat{f}(A \cup B)$ deci $\hat{f}(A) \subset \hat{f}(A \cup B)$; analog pentru $y \in \hat{f}(B)$; deci $\hat{f}(A) \cup \hat{f}(B) \subset \hat{f}(A \cup B)$.

2. Dacă $A \subset B$, atunci $\hat{f}(A) \subset \hat{f}(B)$.

3. $\hat{f}(A \cap B) \subset \hat{f}(A) \cap \hat{f}(B)$.

4. $\hat{f}(A - B) \supset \hat{f}(A) - \hat{f}(B)$.

5. Dacă X este domeniul lui f atunci mulțimea $\hat{f}(X)$ e cuprinsă în codomeniul oricărei funcții g cu $g = f$.

SURJECȚII

În definiția funcției

$$f \quad D \to C$$

nu este inclusă condiția ca $f(x)$ să parcurgă întreg codomeniul C; este posibil ca pentru un anume element $y_0 \in C$ ecuația $f(x) = y_0$ să nu aibă soluție. Avem:

$$f(D) \subset C,$$

dar putem avea:

$$f(D) \neq C.$$

Spunem că f este o surjecție dacă

$$f(D) = C,$$

deci dacă oricare ar fi $y_0 \in C$, există cel puțin un $x_0 \in D$ cu $f(x_0) = y_0$.

Funcția i_D este o surjecție.

Funcțiile constante nu sînt surjecții decît dacă codomeniul nu are decît un element.

Funcția pseudoinversă. Dacă vom considera ecuația $y = f(x)$, atunci vom numi $f^*(y)$ mulțimea tuturor ele-

mentelor x cu $f(x) = y$. Funcția f^* are ca domeniu pe $f(D)$ și ca valori submulțimi $f^*(y) \subset D$.

$$f^* \quad f(D) \to 2^D.$$

Este natural să presupunem $f(D) = C$, deci să presupunem că f este o surjecție și deci

$$f^* : C \to 2^D.$$

Vom extinde pe f^* la $\hat{f}^*$

$$\hat{f}^* \quad 2^C \to 2^D,$$

deci

$x \in f^*(M)$ înseamnă că $x \in f^*(y)$ cu $y \in M$, deci

$$f(x) = y \text{ cu } y \in M, \text{ deci } f(x) \in M.$$

Exerciții

1. $\hat{f}^*(M \cup N) = \hat{f}^*(M) \cup \hat{f}^*(N)$,

căci $x \in \hat{f}^*(M \cup N)$ înseamnă $f(x) \in M \cup N$; dacă $f(x) \in M$, atunci $x \in \hat{f}^*(M)$, deci $x \in \hat{f}^*(M) \cup \hat{f}^*(N)$, deci $\hat{f}^*(M \cup N) \subset \subset \hat{f}^*(M) \cup \hat{f}^*(N)$. Dacă $x \in \hat{f}^*(M) \cup \hat{f}^*(N)$ fie $x \in \hat{f}^*(M)$, deci $f(x) \in M$, deci $f(x) \in M \cup N$, deci $x \in \hat{f}^*(M \cup N)$ deci $\hat{f}^*(M) \subset \hat{f}^*(M \cup N)$; analog $\hat{f}^*(N) \subset \hat{f}^*(M \cup N)$, deci $\hat{f}^*(M) \cup \cup \hat{f}^*(N) \subset \hat{f}^*(M \cup N)$, deci teorema.

2. Dacă $M \subset N$, atunci $\hat{f}^*(M) \subset \hat{f}^*(N)$.

3. $\hat{f}^*(M \cap N) = \hat{f}^*(M) \cap \hat{f}^*(N)$.

Într-adevăr $x \in \hat{f}^*(M \cap N)$ înseamnă $f(x) \in M \cap N$, deci $f(x) \in \in M$, $f(x) \in N$, deci $x \in \hat{f}^*(M)$ și $x \in \hat{f}^*(N)$, deci $x \in \hat{f}^*(M) \cap \cap \hat{f}^*(N)$, deci $\hat{f}^*(M \cap N) \subset \hat{f}^*(M) \cap \hat{f}^*(N)$. Dacă $x \in \hat{f}^*(M) \cap \cap \hat{f}^*(N)$, atunci $x \in \hat{f}^*(M)$, deci $f(x) \in M$ și $x \in \hat{f}^*(N)$, deci $f(x) \in N$, deci $f(x) \in M \cap N$, deci $x \in \hat{f}^*(M \cap N)$, deci $\hat{f}^*(M) \cap \hat{f}^*(N) \subset \hat{f}^*(M \cap N)$, deci teorema.

4. *Dacă*

$$f: X \to Y$$

$$A \subset X, \quad B \subset Y,$$

$$\hat{g} = f/A,$$

atunci

$$\hat{g}^*(B) = A \cap \hat{f}^*(B).$$

INJECȚII

Vom spune că

$$f \quad D \to C$$

este o injecție, dacă pentru $x \neq y$ avem $f(x) \neq f(y)$, deci dacă din $f(x) = f(y)$ se deduce $x = y$.

Deci ecuația $f(x) = y_0$ are cel mult o soluție.

Dacă f este o injecție, atunci incluziunile 3, 4 de la p. 62 se pot întări:

3. $\hat{f}(A \cap B) = \hat{f}(A) \cap \hat{f}(B)$

4. $\hat{f}(A - B) = \hat{f}(A) - \hat{f}(B)$

Într-adevăr, dacă $y \in \hat{f}(A) \cap \hat{f}(B)$, atunci $y \in \hat{f}(A)$, deci $y = f(x')$, $x' \in A$ și $y \in \hat{f}(B)$, deci $y = f(x'')$, $x'' \in B$, deci $f(x') = f(x'')$, deci $x' = x'' \in A \cap B$, deci $y \in \hat{f}(A \cap B)$, deci $\hat{f}(A) \cap \hat{f}(B) \subset \hat{f}(A \cap B)$. Tot astfel, dacă $y \in \hat{f}(A - B)$, atunci $y = f(x')$, $x' \in A - B$, deci $x' \in A$, $x' \notin B$, deci $y \in \hat{f}(A)$; dacă $y \in \hat{f}(B)$, $y = f(x'')$ cu $x'' \in B$; dar $f(x') = f(x'')$, deci $x' = x'' \in A \cap B$ contrar lui $x' \notin B$, deci $y \notin \hat{f}(B)$, deci $y \in \hat{f}(A) - \hat{f}(B)$, deci $\hat{f}(A - B) \subset \hat{f}(A) - \hat{f}(B)$.

Funcția identică este o injecție.

Funcțiile constante nu sînt injecții decît dacă domeniul are un singur element.

Exerciții

Dacă f este o injecție, atunci:
Din $f(A) \subset f(B)$ *deducem* $A \subset B$.

Incluziunea ca funcție. Fie $A \subset B$. Vom defini funcția

$$i_{/A} : A \to B$$

prin

1. domeniul lui $i_{/A}$ este A;

2. $i_{/A}(x) = x$.

Bineînțeles, dacă $A = B$ atunci i_A este funcție identică. Dacă însă $A \subset B$, dar $A \neq B$, atunci $i/_A$ este restricția funcției identice.

Vom considera pe $i/_A$ ca o funcție cu domeniul A și codomeniul B.

$i_{/A}$ este o injecție.

Adeseori $i_{/A}$ va fi numită *injecția canonică* a lui A în $B \supset A$.

BIJECȚII

O funcție

$$f : D \to C$$

este o bijecție, dacă este o injecție și o surjecție în același timp.

Deoarece f este o surjecție, ecuația $f(x) = y$ are cel puțin o soluție pentru orice $y \in C$, deci $f^*(y) \neq \emptyset$ pentru orice $y \in C$; dacă $x' \in f^*(y)$, $x'' \in f^*(y)$, avem $f(x') = f(x'') = y$, deci, deoarece f este și o injecție, $x' = x''$; deci $f^*(y)$ are cel mult un element, deci dacă f este o bijecție $f^*(y)$ are un singur element $f^*(y) = \{x\}$. Vom defini

astfel o funcție $x = f^{-1}(y)$ prin $x \in f^*(y)$. Deci $y = f(x)$ și $x = f^{-1}(y)$ sînt echivalente. Deci,
dacă

$$f: D \to C$$

este o bijecție, atunci există o funcție

$$f^{-1} \quad C \to D,$$

astfel ca

$$y = f(x) \text{ și } x = f^{-1}(y) \text{ să fie echivalente.}$$

Se deduce că

1. $(f^{-1})^{-1} = f$,

2. f^{-1} este o bijecție.

Bijecțiile se mai numesc și *corespondențe biunivoce.*
Dacă există o corespondență biunivocă între două mulțimi X și Y atunci spunem că X și Y sînt cardinal echivalente și scriem

$$x \overline{c} y$$

SUPRAPUNEREA A DOUĂ FUNCȚII

Fie

$$f: X \to Y,$$

$$g \quad Y \to Z.$$

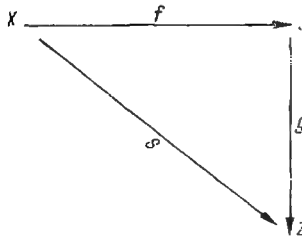


Fig. 48

Vom defini o funcție

$$s \quad X \to Z$$

astfel fie $x \in X$; $y = f(x) \in Y$; $z = g(y) \in Z$; z este o funcție de x, $z = s(x)$ Scriem $z = g(f(x))$.

Se spune că *diagrama e comutativă* (v. p. 197).

Se scrie și

$$s = g \circ f,$$

Operația „$\circ$" este numită compunerea sau suprapunerea funcțiilor.

Teorema I.

$$f \circ i_X = i_Y \circ f = f.$$

Într-adevăr $y = i_X(x) = x$, $z = (f \circ i_X)(x)$ înseamnă $z = f(y) = f(x)$, iar $w = (i_Y \circ f)(x)$ înseamnă $w = i_Y(f(x)) = f(x)$.

Teorema II. (legea de asociativitate a suprapunerii).

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Într-adevăr, dacă $y = f(x)$, $z = g(y)$, $w = h(z)$, atunci $z = (g \circ f)(x)$ și $w = [h \circ (g \circ f)](x)$, iar $w = (h \circ g)(y) = (h \circ g)(f(x)) = [(h \circ g) \circ f](x)$.

Aceste două teoreme se enunță astfel *

Mulțimile formează o categorie dacă pentru mulțimea morfismelor Hom (X, Y) se ia mulțimea Y^X.

Teorema III. *Dacă f și g sînt surjecții, atunci $g \circ f$ este o surjecție.*

Într-adevăr, dacă se dă $z_0 \in Z$ atunci $g(y) = z_0$ are cel puțin o soluție $y_0 \in Y$ cu $g(y_0) = z_0$; dar $f(x) = y_0$ are cel puțin o soluție x_0 cu $f(x_0) = y_0$, deci $s(x_0) = (g \circ f)(x_0) = g(f(x_0)) = g(y_0) = z_0$, deci $s(x) = z_0$ are cel puțin soluția x_0.

Vezi p. 176.

Teorema IV. *Dacă f și g sînt injecții, atunci și $g \circ f$ este injecție.*

Într-adevăr, dacă $s(x') = s(x'')$, atunci $g(f(x')) = g(f(x''))$, dar g fiind o injecție, $f(x') = f(x'')$ și f fiind o injecție $x' = x''$ deci s este o injecție.

Teorema V. *Dacă f și g sînt bijecții $g \circ f$ este o bijecție.*

Teorema VI. *Condiția necesară și suficientă ca funcția $f \quad A \to B$ să fie o injecție este ca din*

$$f \circ h = f \circ k$$

să se deducă

$$h = k.$$

Într-adevăr, dacă f este o injecție pentru orice x, relația

$$f(h(x)) = f(k(x))$$

dă

$$h(x) = k(x).$$

Dacă f nu este o injecție, există $a \neq b$ cu

$$f(a) = f(b).$$

Dacă $X = \{c\}$ și

$$h : X \to A,$$

$$k : X \to A$$

sînt definite de

$$h(c) = a \quad k(c) = b,$$

atunci $h \neq k$

dar

$$f(h(c)) = f(a) = f(b) = f(k(c)).$$

Teorema VII. *Condiția necesară și suficientă ca funcția $f : A \to B$ să fie o surjecție este ca din*

$$h \circ f = k \circ f$$

să se deducă

$$h = k.$$

Într-adevăr, dacă f este o surjecție, pentru orice $y \in B$ ecuația $f(x) = y$ are o soluție cel puțin, deci $h(f(x)) = k(f(x))$ dă $h(y) = k(y)$, deci $h = k$.

Dacă f nu este o surjecție adică există $y_0 \in B$ astfel ca $f(x) \neq y_0$ pentru orice $x \in A$, atunci există h și k astfel încît $h \circ f = k \circ f$ și $h \neq k$; într-adevăr, dacă $h(y_0) \neq k(y_0)$ dar $h(y) = k(y)$ pentru $y \in f(A)$, $h \neq k$, dar $h(f(x)) = k(f(x))$.

Exerciții

1. Dacă se dau funcțiile

$$f : X \to Y$$

$$g : Y \to Z$$

și dacă

$$h = g \circ f,$$

atunci pentru extinderile lor

$$\hat{f} \quad 2^X \to 2^Y$$

$$\hat{g} \quad 2^Y \to 2^Z,$$

$$\hat{h} \quad 2^X \to 2^Z,$$

avem

$$\hat{h} = \hat{g} \circ \hat{f}.$$

2. $\hat{f}^*(\hat{f}(A)) \supset A$.

3. $\hat{f}(\hat{f}^*(B)) = B$.

4. $\hat{f}^*(A - B) = \hat{f}^*(A) - \hat{f}^*(B)$.

5. $\hat{f}^*(\hat{f}(\hat{f}^*(B))) = \hat{f}^*(B)$.

6. Fie

$$f : X \to Y,$$

$$g : X \to Z.$$

Pentru ca să existe o funcție

$$\varphi \quad Y \to Z,$$

cu $g(x) = \varphi(f(x))$

este necesar și suficient ca pentru orice pereche x', x'' să avem implicația:

dacă $f(x') = f(x'')$ *atunci* $g(x') = g(x'')$.

Este evident că condiția este necesară. Reciproc, dacă condiția este îndeplinită, $\hat{g}(\hat{f}^*((y)))$ sau este vidă, dacă $f^*((y))$ este vidă, sau are un element, căci dacă ar avea două elemente: $z' \in g(f^*((y)))$, $z'' \in g(f^*((y)))$, atunci $z' = g(x')$, $z'' = g(x'')$ cu $x' \in f^*(y)$, $x'' \in f^*(y)$, deci $y = f(x') = f(x'')$, deci $g(x') = g(x'')$, deci $z' = z''$; să numim $\varphi(y)$ unicul element al lui $g(f^*((y)))$ $= \varnothing$; dacă $f^*((y)) = \varnothing$, să luăm pe $\varphi(y)$ arbitrar în $Z \subset f^*((y)) \neq \varnothing$ cînd $y \in Y - f(X)$, căci din $y \in f(X)$ deducem $y = f(x)$, deci $x \in f^*((y)) \neq \varnothing$.

Fie $y = f(x)$, deci $x \in f^*((y))$, deci $g(x) \in g(f^*(y))$, deci $g(x) = \varphi(f(x))$.

7. *Dacă*

$$f : 2^E \to 2^E$$

dacă

$$f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y),$$
$$f(f(X)) = X,$$

atunci f transformă submulțimile cu un element ale lui E în mulțimi cu un element, deci există $g : E \to E$ cu $f = \hat{g}$ și g este biunivocă.

α) $f(\varnothing) = \varnothing$, căci $f(\varnothing) \cup \varnothing = f(\varnothing)$, $f(f(\varnothing) \cup \varnothing) = f(f(\varnothing)) \cup f(\varnothing) = f(f(\varnothing)))$, deci $\varnothing \cup f(\varnothing) = \varnothing$, deci $f(\varnothing) = \varnothing$;

β) dacă $X \neq \varnothing$, atunci $f(X) \neq \varnothing$, căci $f(X) = \varnothing$ dă $X = f(f(X)) = f(\varnothing) = \varnothing$;

γ) dacă $x \in E$, $f(\{x\}) \neq \varnothing$;

δ) $f(x) = y \in E$, căci dacă $f(x)$ este o mulțime cu mai mult de un element $f(x) = A \cup B$ cu $A \neq A \cup B$, $B \neq A \cup B$ și $x = f(f(x)) = f(A) \cup f(B)$, deci $f(A) \cup f(B)$ are un element (pe x), deci sau $f(A) \cup f(B) = f(A)$, sau $f(A) \cup f(B) = f(B)$; în primul caz: $A = f(f(A)) = f(f(A) \cup f(B)) = A \cup B$, în al doilea caz: $B = f(f(B)) = f(f(A) \cup f(B)) = A \cup B$, contrar celor de mai sus;

ε) f este biunivocă, deoarece $f(x) = f(y)$ dă $x = f(f(x) = f(f(y)) = y$;

ζ) $f(X)$ e mulțimea lui $f(x)$ cu $x \in X$, căci din $x \in X$ deduc $\{x\} \in X$, deci $\{x\} \cup X = X$, deci $(f(x)) \cup f(X) = f(X)$, deci $f(x) \subset f(X)$ și din $f(x) \in f(X)$ deducem $(f(x)) \subset f(X)$ deci $\{x\} \subset (f(f(x))) = X$ deci $x \in X$.

ALTE PROPRIETĂȚI ALE FUNCȚIILOR

Vom defini *suma directă* a două mulțimi A și B ca fiind mulțimea S compusă din elementele care aparțin lui A sau măcar lui B, elementele comune fiind consi-

derate de două ori: o dată ca elemente ale lui A şi altă dată ca elemente ale lui B. Cu alte cuvinte,

$$S = A_0 \cup B_0$$

cu

$$A \underset{c}{\sim} A_0 \qquad B \underset{c}{\sim} B_0 \qquad A_0 \cap B_0 = \emptyset.$$

Teoremă:

Dacă S este suma directă a mulţimilor A şi B, există două funcţii f şi g

$$f : A \to S,$$
$$g : B \to S,$$

astfel încît, date fiind funcţiile

$$u : A \to X,$$
$$v \quad B \to X,$$

să existe o funcţie

$$h \quad S \to X$$

care să dea

$$u = h \circ f,$$
$$v = h \circ g,$$

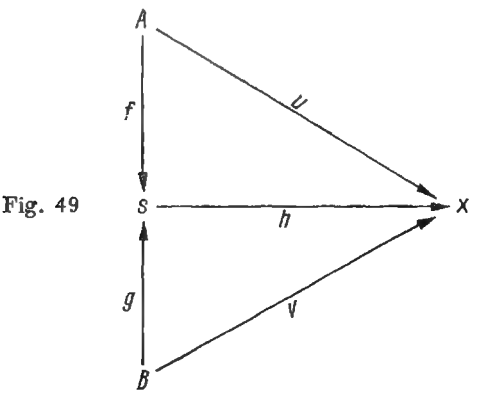


Fig. 49

Într-adevăr, deoarece $A \underset{c}{\sim} A_0$, $B \underset{c}{\sim} B_0$ există bijecții f, g

$$f \quad A \to A_0$$
$$g \quad B \to B_0$$

Dacă $z \in S$, deoarece $S = A_0 \cup B_0$ și $A_0 \cap B_0 = \emptyset$, definim pe $h(z)$ prin dacă $z \in A_0$ atunci $z = f(x)$ cu $x \in A$ și vom lua $h(z) = u(x)$; dacă $z \in B_0$ atunci $z = g(y)$ cu $y \in B$ și vom lua $h(z) = v(y)$; deci $h(z) \in X$ și $h(f(x)) = u(x)$, $h(g(y)) = v(y)$.

Funcția h este unică, adică, *dacă*

$$h \quad S \to X,$$
$$k \quad S \to X,$$

din

$$h \circ f = k \circ f,$$
$$h \circ g = k \circ g$$

deducem

$$h = k$$

Într-adevăr, f, g fiind bijecții, au inverse

$$f^{-1}\colon A_0 \to A,$$
$$g^{-1}\colon B_0 \to B,$$

și avem pentru $z \in A_0$:

$$h(z) = h(f(f^{-1}(z))) = k(f(f^{-1}(z))) = k(z)$$

și pentru $z \in B_0$:

$$h(z) = h(g(g^{-1}(z))) = k(g(g^{-1}(z))) = k(z),$$

deci pentru $z \in S$

$$h(z) = k(z).$$

Fie f o funcție

$$f\colon A \to B;$$

să numim $A/_f$ mulțimea claselor de echivalență ale elementelor lui A echivalente prin relația

$$f(a') = f(a'').$$

Fie

$$g : A/_f \to B$$

funcția definită pentru $x \in A/_f$ prin $g(x) = f(a)$ dacă $a \in x$; fie

$$h \quad A \to A/_f$$

funcția care oricărui $a \in A$ face să-i corespundă $h(a) = \hat{a} \in A/_f$.

g este o injecție căci $g(x') = g(x'')$ cu $a' \in x'$, $a'' \in x''$ dă $f(a') = g(x') = g(x'') = f(a'')$ deci a', a'' sînt echivalente, deci $x' = x''$

h este o surjecție căci oricare ar fi $x \in A/_f$, x este o clasă de echivalență, deci există $a \in A$ cu $a \in x$, deci cu $h(a) = x$.

Am arătat deci că:

Orice funcție f este suprapunerea

$$f = g \circ h$$

unei injecții g și a unei surjecții h.

Pentru funcția f, desenată în figura 47, a_1, a_4, a_5, sînt echivalente și formează clasa $\hat{a}_1$, a_2, a_6 sînt echivalente și formează clasa $\hat{a}_2$, a_3 formează clasa $\hat{a}_3$ și $g(\hat{a}_1) = b_1$, $g(\hat{a}_2) = b_2$, $g(\hat{a}_3) = b_3$ deci g este o injecție iar $h(a_1) = h(a_4) = h(a_5) = \hat{a}_1$, $h(a_2) = h(a_3) = \hat{a}_2$, $h(a_3) = \hat{a}_3$, deci h este o surjecție.

Relația de echivalență generată de o funcție. Fie f o funcție $f \quad X \to Y$. Relația

$$x' \; E_f x''$$

definită prin

$$f(x') = f(x'')$$

este o relație de echivalență, căci ea este reflexivă — căci $f(x) = f(x)$ — simetrică — din $f(x') = f(x'')$ dedu-

cem $f(x'') = f(x')$ — și tranzitivă — din $f(x') = f(x'')$ și $f(x'') = f(x''')$ deducem $f(x') = f(x''')$. Se vede că

$$X/_E \underset{c}{\sim} f(X),$$

căci corespondența între $z \in X/_E$ și $y = f(x)$ pentru $x \in z$ face ca fiecărui $z \in X/_E$ să-i corespundă un singur y, căci dacă $x' \in z$, $x'' \in z$, atunci $x' E_f x''$, deci $f(x') = f(x'')$ și fiecărui $y \in f(x)$ să-i corespundă un singur z.

Clasele de echivalență relative la relația de mai sus se numesc uneori *tranșele* generate de funcția, f, iar $X/_E$ e spațiul tranșelor generat de funcția f *.

Fie E o relație de echivalență între elementele M și funcția

$$\varphi \quad M \to M/_E,$$

definită prin

$$\varphi(x) = \hat{x}.$$

φ este o surjecție

$x' E x''$ echivalează cu $\varphi(x') = \varphi(x'')$

FUNCȚII CU DOMENIUL SAU CU CODOMENIUL FINIT

Funcții cu domeniul finit. Ca domeniu finit cu n elemente vom alege mulțimea

$$N_n = \{1, ..., n\}$$

O funcție

$$\varphi \quad N_n \to A$$

---

* Adeseori se întrebuințează în loc de tranșă, expresia „mulțime de nivel" sau scurt „nivel"

face ca fiecărui $i \in \boldsymbol{N}_n$, deci i cu $1 \leqslant i \leqslant n$ să-i corespundă un element

$$a_i = \varphi(i)$$

cu

$$a_i \in A,$$

deci funcția e caracterizată printr-un șir finit de n elemente ale lui A

$$a_1,...a_n.$$

Funcții cu domeniul și codomeniul finit. O funcție

$$\varphi : \boldsymbol{N}_n \to N_m$$

face ca cele m obiecte

$$1,...,m$$

să fie aranjate cîte n

$$i_1 = \varphi(1),..., i_n = \varphi(n),$$

cu $1 \leqslant i_1 \leqslant m,...,1 \leqslant i_n \leqslant m$, deci lui φ îi corespunde aranjamentul

$$(i_1,..., i_n)$$

al celor m obiecte, $1,...m$ luate cîte n.

Spunem că o variabilă în $\boldsymbol{N}_n$ este n-valentă (bivalentă, trivalentă, tetravalentă, pentavalentă etc.).

Exerciții

Să se construiască:
1. Toate funcțiile cu argumentele și valorile în N_2.
2. Toate funcțiile cu argumentele în N_2 și valorile în N_3.
3. Toate funcțiile cu argumentul în N_3 și valorile în N_2.

Teorema I. *Mulțimea funcțiilor cu argumentul în N_n și valorile în N_m are m^n elemente.*

Într-adevăr, o astfel de funcție e definită prin

$$\varphi(1),...,\varphi(n).$$

Dar $\varphi(i)$ poate avea m valori : $1 \leqslant \varphi(i) \leqslant m$; deci există m^n astfel de funcții.

Teorema II. *Nu există o injecție*

$$\varphi : N_n \to N_m$$

decît dacă $m \geqslant n$.

Într-adevăr, dacă $m < n$, atunci $\varphi(i)$ cu $1 \leqslant \varphi(i) \leqslant m$ neputînd avea decît $m < n$ valori diferite, se deduce că pentru două valori diferite $i' \neq i''$ cu $1 \leqslant i' \leqslant n$ $1 \leqslant i'' \leqslant n$ să avem $\varphi(i') = \varphi(i'')$.

Teorema III. *Nu există o surjecție*

$$\varphi : N_n \to N_m$$

decît dacă $m \leqslant n$.

Într-adevăr, dacă $m > n$ cele n valori ale lui $\varphi(i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$ nu pot fi cele $m > n$ elemente j $1 \leqslant i \leqslant m$

Teorema IV. *Nu există o bijecție*

$$\varphi \quad N_n \to N_m$$

decît dacă $m = n$.

Bijecțiile acestea se numesc **permutările** a n elemente și se notează

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & n \\ \pi(1), \ldots, & \pi(n). \end{pmatrix}$$

Șiruri

O funcție cu domeniul : mulțimea numerelor naturale

$$\varphi : N \to A$$

se numește un *șir*. Notăm

$$a_i = \varphi(i);$$

un șir se scrie deci

$$a_0, \ldots, a_n,$$

Numim *șir dublu* o funcție

$$\varphi \quad N^2 \to A$$

și notăm

$$a_{ij} = \varphi(i,j),$$

În genere, numim șir multiplu (r-uplu) o funcție

$$\varphi \quad N^r \to A$$

și notăm

$$a_{i_1} \quad i_r = \varphi(i_1, \ldots, i_r).$$

Mulțimi indexate. Avem de-a face uneori cu

a) O mulțime α de elemente.
b) O mulțime I a indicilor.
c) O funcție

$$\varphi \quad I \to \alpha,$$

care face ca fiecărui indice $i \in I$ să-i corespundă elementul $e_i \in \alpha$.

Scriem

$$\{e_i\}_{i \in I}.$$

Dacă I este o mulțime finită N_n, mulțimea indexată $\{e_i\}_{i \in N_n}$ este un șir finit de n elemente din α; dacă I este mulțimea N a numerelor naturale, mulțimea indexată $\{e_i\}_{i \in N}$ este un șir simplu, iar dacă $I = N^2, \ldots I = N^r$, mulțimea indexată $\{e_i\}_{i \in N^r}$ este un șir r-uplu. Vom putea lua ca I o mulțime oarecare.

RELAȚII FUNCȚIONALE

Relația

$$y = f(x)$$

între x și y va fi notată F_f, deci vom scrie

$$x F_f y$$

sau ca submulțime a lui $X \times Y$

$$(x,y) \in F_f \subset X \times Y.$$

Această relație se bucură de două proprietăți

1. Dat fiind un $x \in X$, există un $y \in Y$ astfel ca $xF_f y$.
2. Dacă $xF_f y'$ și $xF_f y''$, atunci $y' = y''$

Reciproc, dacă o relație R satisface aceste condiții:

1. Dat fiind $x \in X$ există un $y \in Y$ cu xRy.
2. Dacă xRy' și xRy'', atunci $y' = y''$

atunci, dat fiind x există un y și unul singur astfel ca $x\,R\,y$, deci există o funcție f_R astfel ca $x\,R\,y$ să echivaleze cu $y = f_R\,(x)$.

O relație funcțională F_f este caracterizată prin faptul că în reprezentarea ei printr-o submulțime $F_f \subset X \times Y$ a produsului cartezian, fiecare submulțime $P_{c,X}$, a tuturor perechilor (c,y) cu $y \in Y$, c fiind dat, are cu F_f un element comun și unul singur. Reprezentarea este cea clasică a diagramei unei funcții.

Dacă f, g sînt funcții cu domeniul X iar F_f, F_g sînt relațiile funcționale asociate lui f, g atunci

1. $f = g$ echivalează cu $F_f \Leftrightarrow F_g$
2. Codomeniul lui $f \subset$ codomeniul lui g echivalează cu

$$F_f \Rightarrow F_g$$

3. Produsul $F_g \quad F_f$ a două relații funcționale este o relație funcțională și anume este $F_{g \circ f}$.
4. Transpusa unei relații funcționale nu este în genere o relație funcțională: $\widetilde{F}_f(y,x)$ înseamnă că $y = f(x)$ deci ea este $x \in f^*(y)$, f^* fiind funcția pseudoinversă a lui f.
5. Condiția necesară și suficientă ca $\widetilde{F}_f(y,x)$ să fie o relație funcțională, $F_g(y,x)$ este ca f să fie o bijecție.

Pentru aceste motive se spune uneori că $\widetilde{R}$ este inversa lui R și se notează R^{-1}.

PRODUSUL CARTEZIAN AL MAI MULTOR MULȚIMI

Date fiind trei mulțimi, putem forma produsele carteziene

$$A \times (B \times C)$$
$$(A \times B) \times C$$

Teoremă

$$A \times (B \times C) \underset{c}{\sim} (A \times B) \times C.$$

Într-adevăr, elementele lui $A \times (B \times C)$ sînt perechile $\{a, \{b, c\}\}$, iar cele ale lui $(A \times B) \times C$ sînt perechile $\{\{a, b\}, c\}$. Funcția

$$\varphi \quad A \times (B \times C) \to (A \times B) \times C,$$

definită prin

$$\varphi(\{a, \{b, c\}\}) = \{\{a, b\}, c\}$$

este o bijecție.

Dacă am defini pe $A \times B \times C$ ca fiind mulțimea tripletelor (a,b,c) atunci

$$A \times (B \times C) \underset{c}{\sim} A \times B \times C$$

$$(A \times B) \times C \underset{c}{\sim} A \times B \times C.$$

Vom defini recurent

$$A_1 \times \quad \times A_n = (A_1 \times \quad \times A_{n-1}) \times A_n.$$

Legea asociativă ne permite să grupăm termenii în orice mod.

Prin definiție

$$A^{n+1} = A^n \times A,$$

deci

$$A^n = \underbrace{A \times \ldots \times A}_{n \text{ ori}}$$

Exercițiu

$$A^m \times A^n = A^{m+n}.$$

Dacă P este produsul cartezian

$$P = A \times B$$

și

$$f: P \to A$$
$$P \to B$$

sînt funcțiile

$$f(a,\ b) = a \qquad g(a,\ b) = b$$

atunci oricare ar fi mulțimea X *și funcțiile*

$$u \quad X \to A$$
$$v \quad X \to B$$

există o funcție

$$h \quad X \to P,$$

astfel ca diagrama

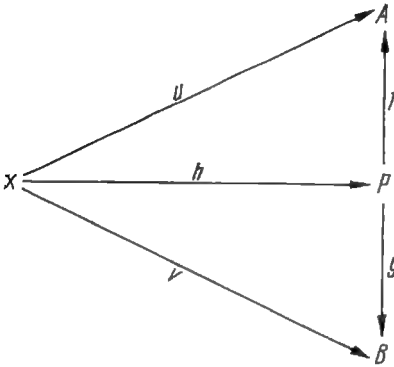


Fig. 50

să fie comutativă, deci ca

$$f \circ h = u$$
$$g \circ h = v.$$

Într-adevăr, este destul să luăm

$$h(x) = (u(x),\ v(x)).$$

Dacă am avea altă funcție

$$k(x) = (\alpha(x),\ \beta(x)),$$

ar trebui să avem

$$\alpha(x) = (f \circ k)\,(x) = (f \circ h)\,(x) = u(x)$$
$$\beta(x) = (g \circ k)\,(x) = (g \circ k)\,(x) = v(x)$$

deci h este unic determinată.

Să se extindă această teoremă la produsul cartezian al mai multor mulțimi.

Cititorul este îndemnat să compare figurile 49 și 50.

Funcții de mai multe variabile

O funcție

$$f: X_1 \times \quad \times X_n \to Y$$

asociază fiecărui

$$z \in X_1 \times \quad \times X_n$$

un y

$$y \in Y,$$

deci fiecărui sistem $(x_1, ..., x_n) \in X_1 \times \quad \times X_n$ un $y \in Y$
Scriem

$$y = f(x_1, ..., x_n)$$

f este o funcție de n-variabile

$$X_1 \times \quad \times X_n$$
$$f \in Y$$

T e o r e m ă

$$Y^{X_1 \times \quad \times X_n} \underset{c}{\sim} (..(Y^{X_1})...)^{X_n}.$$

Vom dovedi întîi că

$$C^{A \times B} \underset{c}{\sim} (C^B)^A.$$

Într-adevăr, $f \in C^{A \times B}$ înseamnă că f este o funcție $f(x, y) \in C$ cu $x \in A$, $y \in B$. Dar $f(x, y) = g_y(x)$ cu

$$g_y \quad A \to C^B,$$

deci $g_y = h(y)$ cu $y \in B$.
În acest mod concepem o funcție de două variabile ca o funcție de o variabilă x, care fiecărui $x \in X$ face să-i corespundă o funcție g_y.

O funcție de n variabile f definește o relație $n+1$-ară $F(x_1, \ldots x_n, y)$, astfel ca :

1. Dat fiind $x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n$, există cel puțin un $y \in Y$ astfel ca $F(x_1, \ldots, x_n, y)$.

2. Dacă $F(x_1, \ldots, x_n, y')$ și $F(x_1, \ldots, x_n, y'')$, atunci $y' = y''$.

O funcție de două variabile

$$f : X \times Y \to \boldsymbol{Z}$$

este o injecție (a lui $X \times Y$ în $\boldsymbol{Z}$), dacă din $f(x', y') = f(x'', y'')$ deducem $x' = x''$, $y' = y''$. O astfel de funcție a mai fost numită funcție cu valori distincte.

Analog în cazul mai multor variabile.

Analog o funcție de n variabile

$$f : X_1 \times \quad \times X_n \to Y$$

este o injecție (a lui $X_1 \times \quad \times X_n$ în Y), dacă din

$$f(x_1', \ldots, x_n') = f(x_1'', \ldots, x_n'')$$

deducem

$$x_1' = x_1'', \ldots, x_n' = x_n''.$$

Proprietăți diverse

1. *Dacă* $f \in \boldsymbol{Z}^Y$ *și* $g \in \boldsymbol{Z}^X$, *pentru ca să existe o* $\varphi \in Y^X$ *cu* $f(\varphi(x)) = g(x)$ *este necesar și suficient ca*

$$g(X) \subset f(Y).$$

Fie $f^*(z) = \boldsymbol{E}_Z \subset Y$. Să luăm

$$\begin{cases} \psi(z) \text{ arbitrar, dacă } z \in \boldsymbol{Z} - f(Y) \\ \psi(z) \in \boldsymbol{E}_Z, \text{ dacă } z \in f(Y), \text{ deci } \psi \in Y^Z; \text{ din } z \in f(Y) \text{ de-} \end{cases}$$

ducem $f(\psi(z)) = z$. Luăm $\varphi(x) = \psi(g(x))$, căci $x \in X$, $g(x) \in f(Y)$, deci $f(\psi(g(x))) = g(x)$, deci $f(\varphi(x)) = g(x)$.

2. *Dacă* f *și* g *dau* $g(X) \subset f(Y)$ *și dacă* f *este o bijecție, soluția ecuației funcționale*

$$f(\varphi(x)) = g(x)$$

este unică $\varphi = f^{-1} \circ g$.

3. *Condiția necesară și suficientă ca, dată fiind funcția*

$$\varphi : X \times Y \to Z$$

să existe, pentru fiece f

$$f : X \times Y \to W,$$

o funcție

$$g : Z \to W,$$

astfel ca:

$$f(x, y) = g(\varphi(x,y))$$

este ca φ *să fie o injecție.*

Condiția este necesară : Fie $x' \neq x''$, $y' \neq y''$, $\varphi(x',y') = \varphi(x'', y'')$. Există $f(x, y)$ cu $f(x', y') \neq f(x'', y'')$. De exemplu, $f(x, y) = x$. Dar $f(x', y') = g(\varphi(x', y'')) = g(\varphi(x'', y'')) = f(x'', y'')$, contrar celor de mai sus.

Condiția e suficientă : Fie φ-dată și f dată. Dacă nu există x și y cu $\varphi(x,y) = z$, să luăm pe $g(z)$ arbitrar în W. Dacă există x și y cu $\varphi(x,y) = z$, atunci există un singur sistem, adică x și y sînt unic determinate de $z : x = \alpha(z)$, $y = \beta(z)$; punem $g(z) = f(\alpha(z), \beta(z))$.

4. *Dacă*

$$\varphi : Y \times Z \to W$$

este o injecție, și numai în acest caz, oricărei funcții $f(x, y, z)$ *îi putem asocia o funcție* $g(x, w)$ *cu*

$$f(x, y, z) = g(x, \varphi(y, z)).$$

Dacă ecuația este satisfăcută, φ este cu valori distincte.

Dacă φ este cu valori distincte, fie f dată. Fie u, v două elemente; dacă nu există y,z cu $v = \varphi(y,z)$ să luăm pe $g(u,v)$ arbitrar în W; dacă există, ele sînt unic determinate

$y = \alpha(v)$, $z = \beta(v)$; să punem $g(u, v) = f(u, \alpha(v), \beta(v))$.

5. *Dacă* $\varphi(x, y)$ *este o injecție, pentru orice* $f(x, y, z, t)$ *există o* $g(u, v)$ *cu*

$$f(x, y, z, t) = g(\varphi(x, y), \varphi(z, t)).$$

Date fiind u,v, dacă există x,y,z,t cu $\varphi(x,y) = u$, $\varphi(z,t) = v$, atunci ele sînt unice: $x = \alpha(u), y = \beta(u), z = \alpha(v), t = \beta(v)$. Luăm deci $g(u,v) = f(\alpha(u), \beta(u), \alpha(v), \beta(v))$, altfel luăm $g(u,v) = 0$.

6. *Dacă* $\varphi(x_1,\ldots, x_n)$ *este o injecție, dată fiind* $f(x_0,x_1,\ldots,x_n)$, *există* $g(u,v)$ *cu*

$$f(x_0,\ldots, x_n) = g(x_0,\varphi\ (x_1,\ldots,x_n))$$

FUNCȚII ȘI RELAȚII ÎN MULȚIMEA CÎT

Fie M, o mulțime, $\equiv$ o relație de echivalență, R o relație n-ară între elementele lui M.

Dacă $x_1 \equiv y_1,\ldots, x_n \equiv y_n$; din faptul că $x_1,\ldots,x_n$ satisfac relația, nu se deduce că $y_1,\ldots, y_n$ o satisface. $R(x_1,\ldots,x_n)$ nu are ca consecință pe $R(y_1,\ldots,y_n)$. Vom spune că relația R este compatibilă cu $\equiv$ dacă:

din $R(x_1,\ldots,x_n)$ și $x_1 \equiv y_1,\ldots, x_n \equiv y_n$ se deduce $R(y_1,\ldots,y_n)$.

Orice relație R, este compatibilă cu relația de egalitate (v. p. 55).

Dacă relația R e compatibilă cu $\equiv$, atunci putem defini pe mulțimea cît $\hat{M} = M/\equiv$ o relație $\hat{R}$ astfel:

$\hat{R}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ *e valabilă cu* $\alpha_i \in M/\equiv$ *dacă există un sistem de elemente* $x_i \in \alpha_i$ *astfel ca* $R(x_1,\ldots,x_n)$ *să fie valabilă.* În acest caz *oricare ar fi elementele* $y_i \in \alpha_i$ *relația* $R(y_1,\ldots, y_n)$ *este valabilă.*

Evident, putem extinde această idee pentru relațiile n-are $R(x_1,\ldots,x_n)$ cînd x_i parcurg anume mulțimi X_i: $x_i \in X_i$, pe care se dau anume relații de echivalență $\underset{i}{\equiv}$ Dacă din $x_1 \underset{1}{\equiv} y_1,\ldots, x_n \underset{n}{\equiv} y_n$, rezultă că dacă: dacă $R(x_1,\ldots,x_n)$ e valabilă, atunci și $R(y_1,\ldots, y_n)$ e valabilă, atunci putem defini o relație $\hat{R}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ pentru $\alpha_i \in X_i/\underset{i}{\equiv}$, care e valabilă dacă $R(x_1,\ldots,x_n)$ e valabilă pentru un sistem de elemente $x_i \in \alpha_i$; în acest caz, oricare ar fi $y_i \in \alpha_i$, $R(y_1,\ldots,y_n)$ este valabilă.

IV

Mulțimi de mulțimi

În figurile 1 — 32 apar cîte două, trei sau patru mulțimi, tot astfel cum avem mulțimi ca $\{a,b\}$, $\{a,b,c,\}$, $\{a,b,c,d\}$ cu două, trei sau patru elemente. După cum avem:

$$a \in \{a,b,c,\}, \quad b \in \{a,b,c,\}, \quad c \in \{a,b,c\},$$

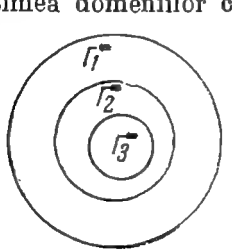
tot astfel cu mulțimile α, β, γ putem forma mulțimea $\{\alpha, \beta, \gamma\}$, care are trei elemente și anume pe α, pe β și pe γ;

$$\alpha \in \{\alpha, \beta, \gamma\}, \ \beta \in (\alpha, \beta, \gamma), \quad \gamma \in (\alpha, \beta, \gamma).$$

Mulțimea $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ este o mulțime de mulțimi.

Mulțimea domeniilor circulare [1] Γ^*_n, cu centrul în O

Fig. 51



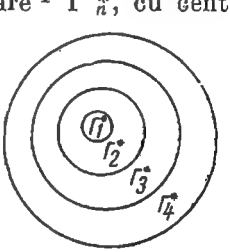


Fig. 52

și raza n, este o mulțime de mulțimi; șirul

$$\Gamma^*_1 \subset \Gamma^*_2 \subset \Gamma^*_3 \ldots$$

este un *șir crescător* de mulțimi; mulțimea $\{\Gamma^*_1, \Gamma^*_2, \ldots\}$ este o mulțime infinită de mulțimi. Șirul domeniilor

[1] Domeniul circular cu centrul O și raza r este mulțimea punctelor M cu $OM < r$.

circulare Γ_n^{**}, cu centrul în O și raza $\frac{1}{n}$ ($\Gamma_1^* = \Gamma_1^{**}$) este un *șir descrescător*

$$\Gamma_1^{**} \supset \Gamma_2^{**} \supset \Gamma_3^{**}$$

de mulțimi, iar mulțimea

$$\{\Gamma_1^{**}, \Gamma_2^{**}, \ldots\}$$

este o altă mulțime infinită de mulțimi.

Dacă considerăm mulțimea tuturor domeniilor circulare, avem un alt exemplu de *mulțime de mulțimi.*

În genere, o mulțime de mulțimi M este o mulțime ale cărei elemente α : $\alpha \in M$ sînt ele însele mulțimi. Mulțimile de indivizi vor fi numite mulțimi de tipul I, iar mulțimile de mulțimi vor fi numite mulțimi de tipul II

Vom introduce mulțimi de tipul III, care vor fi mulțimile de mulțimi de tipul II, adică mulțimile de mulțimi de mulțimi de tipul I, adică mulțimile de mulțimi de mulțimi de elemente și, în genere, prin recurență, mulțimile de tipul N care sînt mulțimile de mulțimi de tipul $N-1$.

Fie M o mulțime de tipul II. Dacă M conține două elemente α_1, α_2, deci $M = \{\alpha_1, \alpha_2,\}$, α_1 și α_2 fiind mulțimi, $\alpha_1 \cup \alpha_2$ este mulțimea tuturor elementelor x, astfel ca una măcar din apartenențele

$$x \in \alpha_1, \quad x \in \alpha_2 \tag{1}$$

să fie adevărată. Dacă $M = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, atunci $\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3 = \alpha_1 \cup (\alpha_2 \cup \alpha_3) = (\alpha_1 \cup \alpha_2) \cup \alpha_3$ este mulțimea tuturor elementelor x, astfel ca măcar una din apartenențele

$$x \in \alpha_1, \quad x \in \alpha_2, \quad x \in \alpha_3 \tag{2}$$

să fie adevărată. Dacă $M = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, atunci $\alpha_1 \cup \ldots \cup \alpha_n = (\alpha_1 \cup \ldots \cup \alpha_{n-1}) \cup \alpha_n$ este mulțimea tuturor elementelor x, astfel ca una măcar din apartenențele

$$x \in \alpha_1, \quad x \in \alpha_2, \ldots, x \in \alpha_n \tag{3}$$

să fie adevărată.

Vom introduce noțiunea de **reuniune infinită**:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \alpha_i = \alpha_1 \cup \quad \cup \alpha_n \cup$$

a unei infinități de mulțimi, adică de **reuniune** a unei mulțimi infinite

$$M = \{\alpha_1, ..., \alpha_n, ...\}$$

de mulțimi astfel: $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ înseamnă că măcar una din apartenențele

$$x \in \alpha_1, ..., x \in \alpha_n, ... \qquad (4)$$

să fie adevărată.

Altfel spus:

După cum $x \in \alpha_1 \cup ... \cup \alpha_n$ înseamnă că există un i astfel ca pentru acel i să avem $x \in \alpha_i$ (bineînțeles, acest i este indicele uneia din mulțimile $\alpha_1, ..., \alpha_n$) deci există o mulțime $\alpha_i \in M$, astfel ca $x \in \alpha_i$, la fel în cazul infinit: $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ înseamnă că există un indice i, astfel ca pentru acel i să avem $x \in \alpha_i$, deci că există o mulțime $\alpha_i \in M$ astfel ca $x \in \alpha_i$.

Putem da acum o definiție generală a ideii de reuniune a mulțimilor unei mulțimi de mulțimi M

$$\delta = \bigcup_{\alpha \in M} \alpha$$

Vom defini pe δ astfel: $x \in \delta$ înseamnă că există cel puțin o mulțime $\alpha \in M$ a mulțimii de mulțimi M, astfel ca $x \in \alpha$.

5.1. *Oricare ar fi* $\alpha \in M$, avem $\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in M} \alpha$ *căci dacă* $\alpha \in M$ *și* $x \in \alpha$, *atunci* $x \in \delta$.

5.2. *Dacă oricare ar fi* $\alpha \in M$ *avem* $\alpha \subset \lambda$ *atunci* $\bigcup_{\alpha \in M} \alpha \subset \lambda$, căci dacă $x \in \delta$, există o $\alpha \in M$, astfel ca $x \in \alpha$; dar deoarece $\alpha \in M$, avem $\alpha \subset \lambda$, deci $x \in \lambda$; deci $\delta \subset \lambda$.

Reciproc, fie σ o mulțime ce satisface condițiile teoremelor 5.1 și 5.2

5.3 * orice $\alpha \in M$ dă $\alpha \subset \sigma$;

5.3 ** dacă orice $\alpha \in M$ dă $\alpha \subset \lambda$, atunci $\sigma \subset \lambda$;

5.3 *dacă o mulțime σ satisface condițiile 5.3* și 5.3**, atunci* $\sigma = \bigcup_{\alpha \in M} \alpha$.

Într-adevăr, din 5.3**, luînd $\lambda = \delta$, deoarece din 5.1 pentru orice $\alpha \in M$ avem $\alpha \subset \delta$, deducem $\sigma \subset \delta$.

De asemenea, din 5.2, luînd $\lambda = \delta$, deoarece din 5.3 * pentru orice $\alpha \in M$ avem $\alpha \in \sigma$, deducem $\delta \subset \sigma$.

Deci $\sigma \subset \delta$ și $\delta \subset \sigma$, deci $\delta = \sigma$.

Să considerăm mulțimile α_{ij}, i și j fiind numere naturale, și reuniunile lor

$$\delta_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij}$$

precum și

$$\delta = \bigcup_{i=1}^{\infty} \delta_i,$$

adică

$$\delta = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij}.$$

δ este mulțimea tuturor x ce se bucură de proprietatea că există un i cu $x \in \delta_i$, deci că există un j astfel ca $x \in \alpha_{ij}$.

Dar dacă considerăm mulțimea de mulțimi M compusă din toate mulțimile α_{ij} și mulțimea

$$\bigcup_{\alpha_{ij} \in M} \alpha_{ij},$$

pe care o vom numi

$$\bigcup_{ij}^{\infty} \alpha_{ij},$$

este vizibil că cele două mulțimi $\bigcup_{i}^{\infty} \bigcup_{j}^{\infty} \alpha_{ij}$ și $\bigcup_{ij}^{\infty} \alpha_{ij}$ sînt egale, ele conținînd ca elemente toate elementele x

pentru care există un i și un j cu $x \in \alpha_{ij}$, elementele uneia măcar din mulțimile α_{ij}:

$$\bigcup_{ij}^{\infty} \alpha_{ij} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij}.$$

Evident,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} \alpha_{ij}. \tag{5.5}$$

Mai general, fie M o mulțime de mulțimi α. Să grupăm mulțimile α în grupuri $A, B, \ldots$. Fie $\mathfrak{S}$ mulțimea tuturor acestor grupuri. M este formată din toate mulțimile tuturor grupurilor $\mathfrak{S}$:

$$M = \bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A.$$

Dacă

$$x \in \bigcup_{\alpha \in M} \alpha,$$

aceasta înseamnă că există cel puțin o mulțime $\alpha \in M$ cu $x \in \alpha$; dar acea α aparține unuia din grupurile $A \in \mathfrak{S}$, deci $\alpha \in A$, $A \in \mathfrak{S}$, deci există o $A \in \mathfrak{S}$ astfel ca

$$x \in \bigcup_{\alpha \in A} \alpha.$$

Fie

$$\delta_A = \bigcup_{\alpha \in A} \alpha,$$

deci există o $A \in \mathfrak{S}$ cu

$$x \in \delta_A,$$

deci:

$$x \in \bigcup_{A \in \mathfrak{S}} \delta_A,$$

$$x \in \bigcup_{A \in \mathfrak{S}} \bigcup_{\alpha \in A} \alpha,$$

deci, *dacă*

$$M = \bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A,$$

atunci

$$\bigcup_{\alpha\in M}\alpha=\bigcup_{A\in\mathfrak{S}}\bigcup_{\alpha\in A}\alpha.$$

Dacă

$$\bigcup_{A\in\mathfrak{S}}A=\bigcup_{B\in\mathfrak{T}}B, \tag{5.6}$$

$$M=\bigcup_{A\in\mathfrak{S}}A=\bigcup_{B\in\mathfrak{T}}B,$$

dacă α sînt mulțimile lui M, (5.6) dă

$$\bigcup_{A\in\mathfrak{S}}\bigcup_{\alpha\in A}\alpha=\bigcup_{B\in\mathfrak{T}}\bigcup_{\beta\in B}\beta,$$

deci,

dacă

$$\bigcup_{A\in\mathfrak{S}}A=\bigcup_{B\in\mathfrak{T}}B, \tag{5.7}$$

atunci

$$\bigcup_{A\in\mathfrak{S}}\bigcup_{\alpha\in A}\alpha=\bigcup_{B\in\mathfrak{T}}\bigcup_{\beta\in B}\beta. \tag{5.8}$$

Relația (5.6) înseamnă că mulțimile α ale lui M le-am grupat în două moduri: în grupurile A, care formează mulțimea $\mathfrak{S}$ și în grupurile B, care formează mulțimea $\mathfrak{T}$. Reunind mulțimile α întîi în mulțimile $\bigcup_{\alpha\in A}\alpha$, reuniuni ale mulțimilor diferitelor grupuri A din $\mathfrak{S}$ și reunind apoi mulțimile α în mulțimile $\bigcup_{\alpha\in B}\alpha$, care sînt reuniuni ale mulțimilor diferitelor grupuri din $\mathfrak{T}$, și în fine reunind mulțimile $\bigcup_{\alpha\in A}\alpha$ pentru toate grupurile A din $\mathfrak{S}$, ceea ce ne dă reuniunea $\bigcup_{A\in\mathfrak{S}}\bigcup_{\alpha\in A}\alpha$, obținem aceeași mulțime cu cea obținută reunind în $\bigcup_{B\in\mathfrak{T}}\bigcup_{\alpha\in B}\alpha$ reuniunile $\bigcup_{\alpha\in B}\alpha$ pentru toate grupurile $B\in\mathfrak{T}$.

Observații analoge celor făcute privind reuniunea se pot face pentru intersecție.

Intersecția $\alpha_1 \cap \alpha_2$ este mulțimea tuturor indivizilor x pentru care amîndouă apartenențele (1) sînt adevărate, intersecția $\alpha_1 \cap \alpha_2 \cap \alpha_3$ este mulțimea tuturor indivizilor x pentru care cele trei apartenențe (2) sînt adevărate și în genere intersecția $\alpha_1 \cap \ldots \alpha_n$ este mulțimea formată din toți x pentru care toate cele n apartenențe (3) sînt adevărate.

Vom defini intersecția infinită

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \alpha_i = \alpha_1 \cap \quad \cap \alpha_n$$

ca fiind mulțimea acelor x pentru care toate apartenențele (4) sînt adevărate.

Mai general definim mulțimea

$$\varkappa = \bigcap_{\alpha \in M} \alpha$$

ca fiind mulțimea tuturor indivizilor x care aparțin tuturor mulțimilor α din mulțimea de mulțimi M.

5.9. *Oricare ar fi* $\alpha \in M$, *avem* $\bigcap_{\alpha \in M} \alpha \subset \alpha$.

Într-adevăr, dacă $x \in \bigcap_{\alpha \in M} \alpha$, atunci $x \in \alpha$ pentru orice $\alpha \in M$.

5.10. *Dacă oricare ar fi* $\alpha \in M$, avem $\mu \subset \alpha$, *atunci* $\mu \subset \bigcap_{\alpha \in M} \alpha$.

Într-adevăr, dacă din $x \in \mu$ deducem $x \in \alpha$ pentru orice $\alpha \in M$, atunci $x \in \bigcap_{\alpha \in M} \alpha$.

Reciproc, fie τ o mulțime ce satisface condițiile teoremelor 5.9 și 5.10 adică:

5.11 * oricare ar fi $\alpha \in M$, avem $\tau \subset \alpha$;

5.11 ** dacă orice $\alpha \in M$ dă $\mu \subset \alpha$, atunci $\mu \subset \tau$;

5.11 *dacă o mulțime* τ *satisface condițiile 5.11* și* 5.11**, *atunci* $\tau = \bigcap_{\alpha \in M} \alpha$.

Într-adevăr, din 5.11 ** luînd $\mu = \varkappa$, deoarece din 5.9 pentru orice $\alpha \in M$ avem $\tau \subset \alpha$, deducem că $\varkappa \subset \tau$.

De asemenea, din 5.10 luînd $\mu = \tau$, deoarece din 5.11 * pentru orice $\alpha \in M$ avem $\tau \subset \alpha$, deducem $\tau \subset \varkappa$.

Deci $\varkappa \subset \tau$, $\tau \subset \varkappa$, deci $\tau = \varkappa$.

Să considerăm mulțimile α_{ij}, i, j fiind numere naturale, și mulțimile

$$\varkappa_i = \bigcap_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij}$$

precum și

$$\varkappa = \bigcap_{i=1} \varkappa_i,$$

pe care o scriem

$$\varkappa = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij};$$

dacă numim

$$\bigcap_{ij} \alpha_{ij},$$

mulțimea

$$\bigcap_{\alpha_{ij} \in M} \alpha_{ij}$$

este vizibil că cele două mulțimi $\bigcap_{ij} \alpha_{ij}$ și $\bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij}$ au aceleași elemente care sînt elementele comune tuturor mulțimilor α_{ij}, deci

$$\bigcap_{ij} \alpha_{ij} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij}. \tag{5.12}$$

Este evident că

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{\infty} \alpha_{ij}. \tag{5.13}$$

Mai general să grupăm, ca la p. 89, mulțimile α ale mulțimii de mulțimi M în grupuri A, B,...; $\mathfrak{S}$ fiind mulțimea tuturor acestor grupuri, deci:

$$M = \bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A.$$

Dacă

$$\varkappa = \bigcap_{\alpha \in M} \alpha,$$

aceasta înseamnă că pentru orice $\alpha \in M$ avem $x \in \alpha$; în special pentru orice $\alpha \in A$, pentru orice $\alpha \in B$ etc. avem $x \in \alpha$, deci

$$x \in \bigcap_{\alpha \in A} \alpha$$

și această apartenență este valabilă pentru orice $A \in \mathfrak{S}$, deci, dacă

$$\varkappa_A = \bigcap_{\alpha \in A} \alpha,$$

atunci x aparține tuturor $\varkappa_A$ cu $A \in \mathfrak{S}$, deci intersecției lor

$$x \in \bigcap_{A \in \mathfrak{S}} \varkappa_A,$$

deci:

$$x \in \bigcap_{A \in \mathfrak{S}} \bigcap_{\alpha \in A} \alpha.$$

Așadar,

dacă

$$M = \bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A,$$

atunci

$$\bigcap_{\alpha \in M} \alpha = \bigcap_{A \in \mathfrak{S}} \bigcap_{\alpha \in A} \alpha. \tag{5.14}$$

Dacă

$$\bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A = \bigcup_{B \in \mathfrak{T}} B,$$

numind

$$M = \bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A = \bigcup_{B \in \mathfrak{T}} B, \tag{5.15}$$

(5.14) dă:

$$\bigcap_{A \in \mathfrak{S}} \bigcap_{\alpha \in A} \alpha = \bigcap_{B \in \mathfrak{T}} \bigcap_{\alpha \in B} \alpha. \tag{5.16}$$

Relația (5.16) înseamnă că mulțimile α ale lui M le-am grupat în două moduri: în grupurile A, care formează mulțimea $\mathfrak{S}$, și în grupurile B, care formează mulțimea $\mathfrak{T}$. Intersectînd mulțimile α întîi în mulțimile $\bigcap_{\alpha \in A} \alpha$, intersecții ale mulțimilor diferitelor grupuri A din $\mathfrak{S}$ și apoi intersectînd mulțimile $\varkappa_A = \bigcap_{\alpha \in A} \alpha$ pentru toate grupurile A din $\mathfrak{S}$, rezultatul obținut nu depinde de felul cum mulțimile α din M au fost grupate în grupurile A.

Exerciții

1. $M = \bigcup_{x \in M} \{x\}$;

2. $M = \bigcup_{X \in 2^M} X$;

3. $M = \bigcup_{X \subset M} X$;

4. $(\bigcup_{\alpha \in M} \alpha) \times (\bigcup_{\beta \in N} \beta) = \bigcup_{\substack{\alpha \in M \\ \beta \in N}} (\alpha \times \beta)$;

5. $(\bigcap_{\alpha \in M} \alpha) \times (\bigcap_{\beta \in N} \beta) = \bigcap_{\substack{\alpha \in M \\ \beta \in N}} (\alpha \times \beta)$;

b 6. $\hat{f}(\bigcup_{\alpha \in M} \alpha) = \bigcup_{\alpha \in M} \hat{f}(\alpha)$;

b 7. $\hat{f}(\bigcap_{\alpha \in M} \alpha) \subset \bigcap_{\alpha \in M} \hat{f}(\alpha)$;

b 8. $\hat{f}^*(\bigcup_{\alpha \in M} \alpha) = \bigcup_{\alpha \in M} \hat{f}^*(\alpha)$;

9. $\hat{f}^*(\bigcap_{\alpha \in M} \alpha) = \bigcap_{\alpha \in M} f^*(\alpha)$.

$\hat{f}$ este funcția definită la p. 61 (extinderea lui f la o funcție de submulțimile domeniului lui f).

10. Dacă f este o injecție

$$\hat{f}\left(\bigcap_{\alpha\in M}\alpha\right)=\bigcap_{\alpha\in M}\hat{f}\,(\alpha)$$

LEGILE LUI MORGAN pentru reuniunea și intersecția infinită:

$$\overline{\bigcap_{\alpha\in M}\alpha}=\bigcup_{\alpha\in M}\bar{\alpha} \tag{5.17}$$

$$\overline{\bigcup_{\alpha\in M}\alpha}=\bigcap_{\alpha\in M}\bar{\alpha} \tag{5.18}$$

extind formulele 1.40 și 1.41.

Demonstrația lui (5.17) și (5.18) nu este grea: $x\in\overline{\bigcap_{\alpha\in M}\alpha}$ înseamnă că $x\notin\bigcap_{\alpha\in M}\alpha$, deci că x nu aparține tuturor mulțimilor α, deci că măcar uneia nu-i aparține, deci că există măcar o $\alpha\in M$ cu $x\notin\alpha$. Aceasta înseamnă că există măcar o $\alpha\in M$ cu $x\in\bar{\alpha}$, deci că $x\in\bigcup_{\alpha\in M}\bar{\alpha}$. La fel pentru a demonstra pe (5.18) observăm că $x\in\overline{\bigcup_{\alpha\in M}\alpha}$ înseamnă că $x\notin\bigcup_{\alpha\in M}\alpha$, deci că nu există nici o $\alpha\in M$ cu $x\in\alpha$, deci că pentru orice $\alpha\in M$ avem $x\notin\bar{\alpha}$, deci că pentru orice $\alpha\in M$ avem $x\in\bar{\alpha}$, deci că $x\in\bigcap_{\alpha\in M}\bar{\alpha}$.

Exerciții 1. Dacă „$\equiv$“ e o relație de echivalență

$$\alpha=\bigcup_{\beta\in\alpha/\equiv}\beta.$$

2. Dacă θ este un endomorfism al mulțimii X:

$$\theta: X\to X,$$

vom numi

$$N_\theta(X)=\bigcap_{n=0}^{\infty}\theta^n(X).$$

Avem

2.1. $$\theta(N_\theta(X))=N_\theta(X),$$

2.2. dacă θ e o surjecție a mulțimii $A \subset X$, atunci $A \subset N_\theta(A)$.
2.3. $N_\theta(A \cap B) = N_\theta(A) \cap N_\theta(B)$.
2.4. dacă $A \subset B$, atunci $N_\theta(A) \subset N_\theta(B)$.

PARTIȚII

O mulțime P de submulțimi ale lui I formează o partiție a lui I, dacă sînt îndeplinite următoarele condiții:

$$1. \quad \bigcup_{\alpha \in P} \alpha = I.$$

2. Dacă $\alpha \in P$, $\beta \in P$, $\alpha \neq \beta$, atunci $\alpha \cap \beta = \emptyset$.

Clasele de echivalență în raport cu o relație de echivalență formează o partiție, căci două clase de echivalență diferite sînt disjuncte și, pe de altă parte, dacă a este un element $a \in \hat{a}$ și $\hat{a} \in I/\equiv$, avem

$$I = \bigcup_{\hat{a} \in I/\equiv} \hat{a}.$$

Dacă P este o partiție, relația $a \equiv b$, definită prin a și b aparțin aceleiași mulțimi a lui P, este o relație de echivalență. Într-adevăr, această relație e reflexivă și simetrică; de asemenea, dacă $a \equiv b$ și $b \equiv c$, atunci a și b, b și c aparțin aceleiași mulțimi a partiției, deci a și c aparțin aceleiași mulțimi a partiției, deci $a \equiv c$.

PRODUS CARTEZIAN INFINIT

Fie $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ n mulțimi nevide. Produsul cartezian

$$\alpha_1 \times \quad \times \alpha_n$$

a fost definit recurent (p. 79) prin

$$(\alpha_1 \times \quad \times \alpha_{n-1}) \times \alpha_n.$$

Putem să-i dăm o altă definiție:

Deoarece $\alpha_1 \times \alpha_2$ este mulțimea perechilor (a_1, a_2) cu $a_1 \in \alpha_1$, $a_2 \in \alpha_2$, iar $\alpha_1 \times \alpha_2 \times \alpha_3$ este mulțimea tri-

pletelor (a_1, a_2, a_3) cu $a_1 \in \alpha_1$, $a_2 \in \alpha_2$, $a_3 \in \alpha_3$, se vede că sîntem îndemnați să definim pe

$$\alpha_1 \times \quad \times \alpha_n$$

ca fiind mulțimea șirurilor de n elemente $(a_1, \ldots a_n)$ cu $a_i \in \alpha_i$. Această definiție coincide cu cea obișnuită pentru $n = 2$. Se vede ușor că

$$\alpha_1 \times \quad \times \alpha_n \underset{c}{\sim} (\alpha_1 \times \quad \times \alpha_{n-1}) \times \alpha_n,$$

căci funcția

$$\Theta : \alpha_1 \times \quad \times \alpha_n \to (\alpha_1 \times \quad \times \alpha_{n-1}) \times \alpha_n,$$

definită prin

$$\Theta(a_1, \ldots, a_n) = \{(a_1, \quad a_{n-1}), a_n\},$$

este o bijecție. Deci definiția dată aici coincide, în afară de o bijecție, cu cea de la p. 79.

Dar,

$$(a_1, \quad a_n) \in \alpha_1 \times \quad \times \alpha_n$$

înseamnă $a_i \in \alpha_i$, deci înseamnă că

$$a_i = \varphi(i)$$

φ fiind o funcție definită pe mulțimea $\{1,\ldots,n\}$ cu valori în $\alpha_1 \cup \quad \cup \alpha_n$ și anume astfel ca

$$\varphi(i) \in \alpha_i.$$

Vom putea defini produsul cartezian infinit

$$\prod_{i=1}^{\infty} \alpha_i$$

ca fiind mulțimea șirurilor

$$a_1, \ldots, a_n, \ldots$$

cu

$$a_i \in \alpha_i$$

deci cu o funcție, $a_i = \varphi(i)$, funcția φ fiind definită pe șirul numerelor naturale $\{1,...,n,...\}$ cu valorile în $\bigcup_{i=1}^{\infty} \alpha_i$, astfel ca

$$\varphi(i) \in \alpha_i$$

În general putem defini astfel produsul cartezian al unei mulțimi indexate $\{\alpha_i\}_{i \in I}$

$$P = \prod_{i \in I} \alpha_i$$

ca fiind mulțimea tuturor funcțiilor

$$\varphi : I \to \bigcup_{i \in I} \alpha_i$$

astfel ca

$$\varphi(i) \in \alpha_i \qquad (*)$$

Dar fiecare șir $a_i = \varphi(i)$ este o funcție

$$\varphi : N_n \to \bigcup_i \alpha_i$$

unde

$$N_n = (1,...,n)$$

dacă șirul este finit și

$$\varphi : N \to \bigcup_{i=1} \alpha_i$$

cu N mulțimea numerelor naturale, dacă șirul este infinit. Așadar, în amîndouă cazurile putem spune că produsul cartesian are ca elemente funcțiile φ.

Este evident că dacă una din mulțimile α_i este mulțimea vidă atunci produsul cartesian este vid.

Să presupunem că niciuna din mulțimile α_i nu este vidă și să presupunem că funcția φ este o injecție, deci că din $i \neq j$ avem $\alpha_i \neq \alpha_j$. În acest caz vom considera mulțimea M, a mulțimilor α și funcția

$$\psi \quad M \to \bigcup_{\alpha \in M} \alpha$$

definită prin

$$\psi(\alpha_i) = \varphi(i)$$

deci

$$\psi(\alpha) \in \alpha$$

deci funcția ψ *alege* cîte un element $\psi(\alpha)$ din fiecare element α al lui M. Vom spune că ψ este o *funcție selectivă*.

AXIOMA LUI ZERMELO

Putem oare, dacă M este o mulțime de mulțimi toate nevide, să afirmăm că există o funcție selectivă? Dacă există o astfel de funcție selectivă, produsul cartezian al unei mulțimi de mulțimi toate nevide este o mulțime nevidă.

În afirmarea existenței unei funcții selective pentru orice mulțime de mulțimi nevide constă axioma lui Zermelo numită și axioma alegerii, căci ea afirmă existența unor alegeri simultane, împărțind pe matematicieni în cei care afirmau că nu înțeleg această axiomă și cei care afirmau că nu e necesar ca această axiomă să fie „înțeleasă". Contribuții importante la detectarea întrebuințării acestei axiome, adesea inconștiente, a avut W. Sierpinski. Axioma a stîrnit multe discuții. Ea este numită și axioma multiplicativă,* deoarece afirmă că un produs cartezian de mulțimi nevide nu e vid.

---

* Axioma alegerii a fost enunțată, pentru prima oară, de către matematicianul german Ernst Zermelo, la începutul secolului nostru. Numeroasele încercări, făcute de-a lungul multor ani, de a *demonstra* axioma alegerii, deci de a o transforma într-o teoremă, au eșuat, conducînd în schimb la un număr mare de propoziții echivalente cu axioma alegerii. Aceste propoziții au fost strînse într-o carte de către matematicianul polonez Waclaw Sierpinski, care de altfel a adus numeroase contribuții în legătură cu această axiomă.

Un exemplu simplu în care existența unei mulțimi selective nu poate fi obținută fără axioma alegerii este următorul. Să asociem fiecărei funcții reale f, de o variabilă reală, funcția opusă $-f$. Să considerăm familia F a tuturor perechilor $(f, -f)$. Existența

LEGILE DISTRIBUTIVE generale cer o explicație mai amplă.

Legea 1

$$a \cap (b_1 \cup b_2) = (a \cap b_1) \cup (a \cap b_2)$$

se extinde ușor la:

$$a \cap (b_1 \cup \quad \cup b_n) = (a \cap b_1) \cup \quad \cup (a \cap b_n),$$

deci la

$$a \cap \bigcup_{i=1}^{n} b_i = \bigcup_{i=1}^{n} (a \cap b_i).$$

Putem deci extinde această lege la

$$(a_1 \cup a_2) \cap \bigcup_{i=1}^{n} b_i = \left[a_1 \cap \bigcup_{i=1}^{n} b_i\right] \cup \left[a_2 \cap \bigcup_{i=1}^{n} b_i\right] =$$

$$= \left[\bigcup_{i=1}^{n} (a_1 \cap b_i)\right] \cup \left[\bigcup_{i=1}^{n} (a_2 \cap b_i)\right]$$

și analog la

$$(a_1 \cup \quad \cup a_m) \cap \bigcup_{i=1}^{n} b_i = \left[\bigcup_{i=1}^{n} (a_1 \cap b_i)\right] \cup \ldots \cup \left[\bigcup_{i=1}^{n} (a_m \cap b_i)\right]$$

sau

$$\left[\bigcup_{j=1}^{m} a_j\right] \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} b_i\right] = \bigcup_{j=1}^{m} \bigcup_{i=1}^{n} (a_j \cap b_i)$$

---

unei mulțimi care să conțină cîte un element și numai unul din fiecare pereche din F, nu poate fi obținută fără axioma alegerii.

În urmă cu aproape 20 de ani, matematicianul american (de origine austriacă) Kurt Gödel a reușit să demonstreze că dacă sistemul de axiome al teoriei mulțimilor este necontradictoriu, atunci el rămîne necontradictoriu cînd i se adaugă ca o nouă axiomă, axioma alegerii. Era astfel spulberată posibilitatea de a demonstra că axioma alegerii este falsă. Rămînea însă posibilitatea de a demonstra falsitatea negației axiomei alegerii. Însă și această posibilitate a fost spulberată în urmă cu cîțiva ani, de către matematicianul american Paul Cohen, care a arătat că negația axiomei alegerii nu este contradictorie. Acest rezultat, împreună cu cel al lui Kurt Gödel, conduce la concluzia că axioma alegerii constituie o propoziție independentă, cu alte cuvinte nici ea, nici negația ei nu sînt contradictorii. Există deci o matematică cu axioma alege-

și la

$$\left[\bigcup_{i=1}^{m} a_i\right] \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} b_j\right] \cap \left[\bigcup_{h=1}^{p} c_h\right] = \bigcup_{i,j,h} (a_i \cap b_j \cap c_h)$$

$$\left[\bigcup_{i_1=1}^{n_1} a_{1i_1}\right] \cap \quad \cap \left[\bigcup_{i_m=1}^{n_m} a_{mi_m}\right] = \bigcup_{i_1,\ldots,i_m} \left[a_{1i_1} \cap \quad \cap a_{mi_m}\right]$$

ceea ce se scrie pe larg

$$(a_{11} \cup \quad \cup a_{1n_1}) \cap \ldots \cap (a_{m1} \cup \quad \cup a_{m\,n_m}) =$$
$$= \bigcup_{i_1,\ldots,i_m} (a_{1i_1} \cap \quad \cap a_{mi_m}).$$

În aceste ultime formule $i_1,\ldots,i_m$ sînt un șir de m numere naturale $1 \leqslant i_1 \leqslant n_1,\ldots,1 \leqslant i_m \leqslant n_m$. Un astfel de șir e o funcție

$$i_r = \varphi(r),$$

funcția φ avînd ca argument numărul natural $r : 1 \leqslant \leqslant r \leqslant m$ și ca valoare pe $i_r : 1 \leqslant i_r \leqslant n_r$, deci

$$\varphi(r) \in N_{n_r}$$

sau, cu $\psi(N_r) = \varphi(r)$,

$$\psi(N_r) \in N_{n_r},$$

ψ este o funcție selectivă; deci

$$\bigcap_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} = \bigcup_{\varphi} \bigcap_{i} a_{i\varphi(i)} \tag{5.19}$$

---

rii și o matematică fără axioma alegerii, tot așa cum există o geometrie euclidiană și geometrii fără postulatul al cincilea al lui Euclid, adică geometrii neeuclidiene. Rezultatele lui Gödel și Cohen relative la axioma alegerii pot fi comparate, ca importanță, cu rezultatele lui Lobacevski și Bolyai relative la postulatul paralelelor.

Dar în momentul de față avem o imagine foarte palidă despre granița care separă matematica cu axioma alegerii, de cea fără axioma alegerii, deoarece nu s-au inventariat cu atenție toate situațiile în care s-a folosit axioma alegerii. În orice caz, din rezultatul lui Cohen s-au și obținut unele consecințe deosebit de interesante, adesea surprinzătoare, cum este următorul rezultat al lui Solomon Feferman: Afirmația că mulțimea numerelor reale este o reuniune numărabilă de mulțimi numărabile, este o propoziție independentă. (Notă alcătuită de Solomon Marcus.)

Tot astfel legea 2:

$$a \cup (b_1 \cap b_2) = (a \cup b_1) \cap (a \cup b_2)$$

se extinde la

$$a \cup \bigcap_{i=1}^{n} b_i = \bigcap_{i=1}^{n} (a \cup b_i)$$

$$\left[\bigcap_{j=1}^{m} a_j\right] \cup \left[\bigcap_{i=1}^{n} b_i\right] = \bigcap_{j=1}^{m} \bigcap_{i=1}^{n} (a_j \cup b_i)$$

$$\left[\bigcap_{i_1=1}^{n_1} a_{1i_1}\right] \cup \quad \cup \left[\bigcap_{i_m=1}^{n_m} a_{mi_m}\right] = \bigcap_{i_1, \ldots, i_m} (a_{1i_1} \cup \quad \cup a_{mi_m}),$$

deci

$$\bigcup_{i=1}^{m} \bigcap_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} = \bigcap_{\varphi} \bigcup \alpha_{i\varphi(i)}. \tag{5.20}$$

Aceste legi de distribuție se extind în cazul general

$$\bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J_i} \alpha_{ij} = \bigcup_{\varphi \in \Psi} \bigcap_{i \in I} \alpha_{i\varphi(i)} \tag{5.21}$$

$$\bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J_i} \alpha_{ij} = \bigcap_{\varphi \in \Psi} \bigcup_{i \in I} \alpha_{i\varphi(i)}, \tag{5.22}$$

unde Ψ e mulțimea funcțiilor φ cu

$$\Psi = \mathcal{E}\{\varphi \mid \varphi(i) = \psi(J_i), \psi \in \prod_{i \in I} J_i.\}$$

Într-adevăr, $x \in \bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J_i} \alpha_{ij}$ înseamnă că oricare ar fi $i \in I$, $x \in \bigcup_{j} \alpha_{ij}$; deci pentru fiecare $i \in I$ există un $j \in J_i$, astfel ca $x \in \alpha_{ij}$; dar acel $j \in J_i$ corespunde lui $i \in I$, deci $j = \varphi(i)$, fiind o funcție cu argumentul în I și cu valoarea

$$j \in \bigsqsubset_{i \in I} J_i,$$

deci o funcție

$$\varphi : \mathrm{I} \to \bigcup_{i \in I} J_i,$$

astfel ca

$$\varphi(i) \in J_i,$$

deci cu $\psi(J_i) = \varphi(i)$, ψ este o funcție selectivă

$$\psi(J_i) \in J_i,$$

deci:

$$\psi \in \prod_{i \in I} J_i.$$

Tot astfel $x \in \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J_i} \alpha_{ij}$ înseamnă că există un i fie el i_0 cu $x \in \bigcap_{j \in J_{i_0}} \alpha_{i_0 j}$ deci că $x \in \alpha_{i_0 j}$ pentru orice j, deci dacă se dă o funcție φ, $x \in \alpha_{i_0 \varphi(i_0)}$, deci $x \in \bigcup \alpha_{i \varphi(i)}$ și aceasta pentru orice $\varphi \in \psi$, deci $x \in \bigcap_{\varphi \in \psi} \bigcup \alpha_{i \varphi(i)}$.

Legile de idempotență. Cînd scriem

$$\delta = \bigcup_{\alpha \in M} \alpha,$$

M este o mulțime de elemente, deci dacă am vrea să obținem pe $\alpha \cup \beta$, am lua mulțimea $M = \{\alpha, \beta\} = \{\alpha\} \cup \{\beta\}$, bineînțeles dacă $\alpha \neq \beta$; dacă însă $\alpha = \beta$, atunci $\{\alpha\} \cup \{\alpha\} = \{\alpha\} = \{\alpha, \alpha\}$ și n-am mai putea obține pe $\alpha \cup \alpha$.

Pentru a putea obține pe $\alpha \cup \alpha$ și pe $\alpha \cap \alpha$ trebuie să definim disjuncțiile și conjuncțiile

$$\delta = \bigcup_{i \in I} \alpha_i,$$

$$\varkappa = \bigcap_{i \in I} \alpha_i,$$

ceea ce putem face astfel:

$x \in \bigcup_{i \in I} \alpha_i$ înseamnă că există un $i \in I$ cu $x \in \alpha_i$;

$x \in \bigcap_{i \in I} \alpha_i$ înseamnă că pentru orice $i \in I$ avem $x \in \alpha_i$.

O mulțime indexată $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ este o funcție

$$\varphi : I \to M$$

cu

$$\alpha_i \in M$$

Legile de idempotență au efectul că într-o reuniune $\alpha_1 \cup \ldots \cup \alpha_n$ sau intersecție $\alpha_1 \cap \ldots \cap \alpha_n$ o mulțime α_i care apare de mai multe ori să nu mai apară decît o dată. Ele arată că

$$\bigcup_{i \in I} \alpha_i = \bigcup_{\alpha \in \varphi(I)} \alpha \qquad \bigcap_{i \in I} \alpha_i = \bigcap_{\alpha \in \varphi(I)} \alpha.$$

PROPRIETĂȚI ALE ENDOMORFISMELOR

O funcție φ este un endomorfism al lui M dacă 1°. $\varphi(x)$ este definit cînd $x \in M$ și 2°. $\varphi(M) \subset M$. (Dedekind spune că M este un lanț pentru φ.)

Dacă A este un lanț pentru φ, atunci și $\varphi(A)$ este un lanț pentru φ.

Dacă $X \subset A$ și A este un lanț pentru φ, atunci $\varphi(X) \subset A$.

Dacă $\varphi(X) \subset A$ și A este un lanț pentru φ, atunci există un lanț B pentru φ, care dă $X \subset B$. Avem $\varphi(B) \subset A$. Într-adevăr, $B = X \cup A$, deci $X \subset B$ și $\varphi(B) = \varphi(X) \cup \cup \varphi(A) \subset \varphi(A) \subset A \cup X = B$, deci

B este lanț pentru φ și $\varphi(B) \subset A$.

Dacă $\mathfrak{M}$ este o mulțime de lanțuri A pentru φ, atunci $\bigcup_{A \in \mathfrak{M}} A$ este un lanț pentru φ.

Dacă $\mathfrak{M}$ este o mulțime de lanțuri A pentru φ atunci, $\bigcap_{A \in \mathfrak{M}} A$ *este un lanț pentru φ.*

Dacă $A \subset I$ este o mulțime dată, să numim $A_\varphi = \bigcap_{X \in \mathfrak{M}} X$ în care $\mathfrak{M}$ este definită ca mulțimea mulțimilor X, astfel încît

α) $X \supset A$

β) X este un lanț pentru φ.

Observăm că $\mathfrak{M} \neq \emptyset$, căci $I \in \mathfrak{M}$ și $A_\varphi \supset A$.

A_φ este lanț pentru φ, căci este intersecție de mulțimi cu aceste proprietăți.

Dacă $A \subset L$ și L este lanț pentru φ, atunci $A_\varphi \subset L$.

Avem $\varphi(A) \subset A_\varphi$.

Condiția necesară ca A *să fie lanț pentru* φ *este* $A_\varphi = A$.

Dacă $A \subset B$, *atunci* $A_\varphi \subset B_\varphi$.

Dacă $B \subset A_\varphi$ *atunci* $\varphi(B) \subset A_\varphi$

$\varphi(A_\varphi) = (\varphi(A))_\varphi$; fie $L = (\varphi(A))\varphi$, L este lanț pentru φ; $\varphi(A) \subset L$, deci există un lanț pentru φ, fie el K cu $A \subset K$, $\varphi(K) \subset L$, deci $A_\varphi \subset K$.

$\varphi(A_\varphi) \subset \varphi(K) \subset L$, deci $\varphi(A_\varphi) \subset (\varphi(A))\varphi$.

Din $\varphi(A) \subset \varphi(A_\varphi)$ și $\varphi(A_\varphi)$ este un lanț deducem $(\varphi(A))\varphi \subset \varphi(A_\varphi)$.

$A_\varphi = A \cup \varphi(A_\varphi)$. Fie $L = \varphi(A_\varphi) = \varphi(A_\varphi)_\varphi$ $K = A \cup L$, deci $\varphi(A) \subset L$; dar L este lanț, deci K este lanț. $A \subset K$, deci $A_\varphi \subset K$. Dar $A \subset A_\varphi$, deci $L \subset A_\varphi$, deci $K \subset A_\varphi$.

Dacă $A_\varphi \subset S$, *atunci*

$$A \subset S$$

și

$$\varphi(A_\varphi \cap S) \subset S.$$

Căci $A \subset A_\varphi \subset S$ și $\varphi(A_\varphi \cap S) \subset \varphi(A_\varphi) = (\varphi(A))_\varphi \subset A_\varphi \subset S$.

Dacă $A \subset S$ *și*

$$\varphi(A_\varphi \cap S) \subset S,$$

atunci $A_\varphi \subset S$.

Din $\varphi(A_\varphi \cap S) \subset S$ și din $\varphi(A_\varphi \cap S) \subset A_\varphi$ deduc $\varphi(A_\varphi \cap S) \subset A_\varphi \cap S$, deci $A_\varphi \cap S$ este lanț pentru φ. Or, din $A \subset S$, deci $A \subset A_\varphi \cap S$, deducem că $A_\varphi \subset A_\varphi \cap S$, deci $A_\varphi \subset S$.

Ultimele două teoreme arată că pentru a dovedi că $A_\varphi \subset S$ este necesar și suficient să arătăm că $A \subset S$ și $\varphi(A_\varphi \cap S) \subset S$; această metodă este analogă metodei de inducție completă. Se poate enunța:

Pentru a dovedi că orice element al lui A *are proprietatea de a aparține lui* S *este destul să arătăm*:

α) Că orice element al lui A_φ aparține lui S.

β) Că o imagine prin φ a oricărui element al lui A_φ ce aparține lui S aparține și ea lui S.

Dacă $\mathfrak{M}$ este o mulțime de mulțimi:

$$(\bigcap_{X\in\mathfrak{M}} X)_\varphi \subset \bigcap_{X\in\mathfrak{M}} X_\varphi$$

$$(\bigcup_{X\in\mathfrak{M}} X)_\varphi = \bigcup_{X\in\mathfrak{M}} X_\varphi$$

Dacă L este un lanț pentru φ și $\varphi(L)\subset A\subset L$, atunci și A este un lanț pentru φ

Dat fiind un endomorfism φ al mulțimii X, mulțimea

$$\mathfrak{N}_\varphi = \bigcap_{n=0}^{\infty} \varphi^n(X)$$

—cu $\varphi^0(x) = x$, $\varphi^{n+1}(x) = \varphi(\varphi^n(x)$ — va fi numită *miezul* endomorfismului φ. Avem

$\mathfrak{N}_\varphi$ este un lanț pentru φ

Observații. Ce înseamnă $\bigcup_{\alpha\in\varnothing}\alpha$ și $\bigcap_{\alpha\in\varnothing}\alpha$, $\varnothing$ fiind mulțimea de mulțimi vidă? Dar $\bigcup_{\alpha\in I}\alpha$ și $\bigcap_{\alpha\in I}\alpha$, I fiind mulțimea tuturor mulțimilor?

Conform definiției $x\in\bigcup_{\alpha\in\mathfrak{M}}\alpha$, înseamnă că există o mulțime α astfel ca $\alpha\in\mathfrak{M}$ și $x\in\alpha$, deci $x\in\bigcup_{\alpha\in\varnothing}\alpha$ ar însemna că ar exista o mulțime α cu $\alpha\in\varnothing$ și $x\in\alpha$.

Dar $\alpha\in\varnothing$ este întotdeauna falsă, deci $\alpha\in\varnothing$ și $x\in\alpha$ este totdeauna falsă, deci $x\in\bigcup_{\alpha\in\varnothing}\alpha$ este întotdeauna falsă, deci

$$\bigcup_{\alpha\in\varnothing}\alpha = \varnothing \tag{1}$$

Conform definiției $x\in\bigcap_{\alpha\in\varnothing}\alpha$, înseamnă că pentru orice α, dacă $\alpha\in\varnothing$, atunci $x\in\alpha$. Dar $\alpha\in\varnothing$ este întotdeauna falsă, deci propoziția: dacă $\alpha\in\varnothing$, atunci $x\in\alpha$ este adevărată (vezi și p. 153) deci oricare ar fi x, avem $x\in\bigcap_{\alpha\in\varnothing}\alpha$ deci

$$\bigcap_{\alpha\in\varnothing}\alpha = I. \tag{2}$$

Conform definiției $x\in\bigcup_{\alpha\in I}\alpha$, înseamnă că există o mulțime α cu $\alpha\in I$ și $x\in\alpha$. Dar $\{x\}\in I$ și $x\in\{x\}$,

deci există $\alpha = \{x\}$ care îndeplinește aceste condiții, deci oricare ar fi x, $x \in \bigcup_{\alpha \in I} \alpha$, deci

$$\bigcup_{\alpha \in I} \alpha = I \tag{3}$$

Conform definiției $x \in \bigcap_{\alpha \in I} \alpha$, înseamnă că dacă $\alpha \in I$, atunci $x \in \alpha$.

Dar $\emptyset \in I$ și totuși $x \notin \emptyset$, deci $x \notin \bigcap_{\alpha \in I} \alpha$, oricare ar fi x, deci

$$\bigcap_{\alpha \in I} \alpha = \emptyset \tag{4}$$

TEOREMA LUI BANACH

Dacă X și Y sînt două mulțimi, φ și ψ două injecții cu $\varphi(X) \subset Y$ și $\psi(Y) \subset X$, atunci putem descompune pe X și Y în cîte două mulțimi disjuncte

$$X = X_1 \cup X_2 \quad \text{cu} \quad X_1 \cap X_2 = \emptyset,$$
$$Y = Y_1 \cup Y_2 \quad \text{cu} \quad Y_1 \cap Y_2 = \emptyset,$$

astfel ca

$$\varphi(X_1) = Y_1 \qquad \psi(Y_2) = X_2.$$

Să considerăm mulțimea

$$A = X - \psi(Y),$$

care dă

$$\psi(Y) = X - A.$$

Fie $\mathfrak{M}$ clasa tuturor mulțimilor Z care au proprietățile:

$\alpha)$ $\qquad Z \supset A$

$\beta)$ $\qquad \psi(\varphi(Z)) \subset Z.$

Clasa $\mathfrak{M}$ nu este vidă, căci $X \in \mathfrak{M}$, deoarece $A \subset X$ și $\psi(\varphi(X)) \subset X$. Fie X_1 intersecția mulțimilor clasei $\mathfrak{M}$:

$$X_1 = \bigcap_{Z \in \mathfrak{M}} Z.$$

Se vede că $X_1 \supset A$, deoarece orice $Z \supset A$ și, deoarece φ și ψ sînt injecții $\psi(\varphi(X_1)) = \psi(\varphi(\bigcap_{Z \in \mathfrak{M}} Z)) = \bigcap_{Z \in \mathfrak{M}} \psi(\varphi(Z)) \subset$

$\subset \bigcap_{Z \in \mathfrak{M}} Z = X_1$,

deci $$\psi(\varphi(X_1)) \subset X_1.$$

Avem $A \subset X_1$ și $\psi(\varphi(X_1)) \subset X_1$, deci $A \cup \psi(\varphi(X_1)) \subset$ $\subset X_1$ Pe de altă parte, $A \cup \psi(\varphi(X_1)) \supset A$ și $\psi(\varphi(A \cup$ $\cup \psi(\varphi(X_1)))) \subset \psi(\varphi(A)) \cup \psi(\varphi(\psi(\varphi(X_1)))) \subset \psi(\varphi(X_1)) \subset$ $\subset A \cup \psi(\varphi(X_1))$, deci $A \cup \psi(\varphi(X_1)) \in \mathfrak{M}$ deci $A \cup$ $\cup \psi(\varphi(X_1)) \supset X_1$, deci

$$A \cup \psi(\varphi(X_1)) = X_1$$

Să luăm

$$X_2 = X - X_1,$$
$$Y_1 = \varphi(X),$$
$$Y_2 = Y - Y_1;$$

se vede că

$$X = X_1 \cup X_2 \quad \text{cu} \quad X_1 \cap X_2 = \emptyset,$$
$$Y = Y_1 \cup Y_2 \quad \text{cu} \quad Y_1 \cap Y_2 = \emptyset,$$

Să calculăm pe $\psi(Y_2)$. Avem ψ fiind o injecție:

$$\begin{aligned} \psi(Y_2) &= \psi(Y) - \psi(Y_1), \\ &= (X - A) - \psi(\varphi(X_1)), \\ &= X - (A \cup \psi(\varphi(X_1)), \\ &= X - X_1, \\ &= X_2. \end{aligned}$$

Deci teorema este demonstrată.

Exerciții *

Dacă

$$\varphi \quad X \to Y,$$
$$\psi : Y \to X.$$

sînt două injecții, vom numi descompunere de tip Banach a mulțimii X în raport cu perechea de injecții (φ, ψ) o descompunere

$$X = X_1 \cup X_2 \quad \text{cu} \quad X_1 \cap X_2 = \emptyset,$$

astfel încît dacă

$$Y_1 = \varphi(X_1), \qquad X_2 = \psi(Y_2)$$

atunci să avem

$$Y = Y_1 \cup Y_2 \qquad Y_1 \cap Y_2 = \emptyset.$$

1. Dacă α și β sînt două descompuneri de tip Banach.

$$X = X_1^\alpha \cup X_2^\alpha, \qquad X = X_1^\beta \cup X_2^\beta,$$

atunci punînd

$$X_1^\gamma = X_1^\alpha \cup X_1^\beta, \qquad X_2^\gamma = X_2^\alpha \cap X_2^\beta,$$
$$X_1^\delta = X_1^\alpha \cap X_1^\beta, \qquad X_2^\delta = X_2^\alpha \cup X_2^\beta,$$

γ și δ sînt descompuneri de tip Banach.

Am presupus că X_1^α, X_1^β, X_2^α, Y_2^α sînt astfel ca

$$X_1^\alpha \cap X_2^\alpha = \emptyset, \qquad X_1^\beta \cap X_2^\beta = \emptyset,$$
$$Y_1^\alpha = \varphi(X_1^\alpha), \qquad Y_1^\beta = \varphi(X_1^\beta),$$
$$X_2^\alpha = \psi(Y_2^\alpha), \qquad X^\beta = \psi(Y_2^\beta),$$
$$Y = Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha, \qquad Y = Y_1^\beta \cup Y_2^\beta,$$
$$Y_1^\alpha \cap Y_2^\alpha = \emptyset, \qquad Y_1^\beta \cap Y_2^\beta = \emptyset.$$
$$Y_1^\gamma = \varphi(X_1^\gamma), \qquad Y_1^\delta = \varphi(X_1^\delta),$$
$$X_2^\gamma = \psi(Y_2^\gamma), \qquad X_2^\delta = \psi(Y_2^\delta),$$

Trebuie să dovedim că

$$X_1^\gamma \cap X_2^\gamma = \emptyset, \qquad X_1^\delta \cap X_2^\delta = \emptyset,$$
$$Y = Y_1^\gamma \cup Y_2^\gamma, \qquad Y = Y_1^\delta \cup Y_2^\delta,$$
$$Y_1^\gamma \cap Y_2^\gamma = \emptyset, \qquad Y_1^\delta \cap Y_2^\delta = \emptyset.$$

2. Să considerăm mulțimea Δ a tuturor descompunerilor de tip Banach. Fie

$$X_1^\lambda = \bigcup_{\tau \in \Delta} X_1^\tau, \qquad X_2^\lambda = \bigcap_{\tau \in \Delta} X_2^\tau,$$
$$X_1^\mu = \bigcap_{\tau \in \Delta} X_1^\tau. \qquad X_2^\mu = \bigcup_{\tau \in \Delta} X_2^\tau,$$

λ și μ sînt două descompuneri de tip Banach și avem

$$X_1^{\lambda} \supset X_1^{\sigma} \supset X_1^{\mu},$$

$$X_2^{\lambda} \subset X_2^{\sigma} \subset X_2^{\mu},$$

pentru orice descompunere σ de tip Banach.

3. Mulțimile $X_1^{\alpha} - X_1^{\beta}$, $X_2^{\alpha} - X_2^{\beta}$ sînt invariate de endomorfismul $\psi\circ\varphi$ iar $Y_1^{\alpha} - Y_1^{\beta}$, $Y_2^{\alpha} - Y_2^{\beta}$ sînt invariate de endomorfismul $\varphi\circ\psi$.

4. Construcția dată la p. 107 sqq, dă mulțimile

$$X_1^{\mu} = \bigcup_{n=0}^{\infty} (\psi\varphi)^n \ (X - \psi \ (Y)), \tag{1}$$

$$X_2^{\mu} = X - X_1^{\mu}, \tag{2}$$

$$X_2^{\lambda} = \bigcup_{n=0}^{\infty} (\psi\varphi)^n \psi(Y - \varphi(X)), \tag{3}$$

$$X_1^{\lambda} = X - X_2^{\lambda}. \tag{4}$$

Pentru a demonstra aceste teoreme să notăm X_1^{τ} membrul al doilea din (1) și $X_2^{\tau} = X - X_1^{\tau}$. Din demonstrația teoremei lui Banach reiese că X_1^{τ} și X_2^{τ} formează o descompunere de tip Banach. Dar

$$(\psi\varphi)^n X \supset (\psi\varphi)^n \psi(Y) \supset (\psi\varphi)^{n+1}(X),$$

deci, dacă $x \in X_1^{\tau}$, există un n cu $x \notin (\psi\varphi)^n \psi(Y)$, deci $x \notin (\psi\varphi)^m \psi(Y)$ pentru $m > n$, deci $X_1^{\tau} \cap N_{\psi\varphi}(X) = \emptyset$. Deoarece $X_1^{\tau} - X_1^{\sigma} \subset X_1^{\tau} \cap N_{\psi\varphi}(X) = \emptyset$, avem $X_1^{\sigma} \subset X_1^{\tau}$ pentru orice $\sigma \in \Delta$, deci $X_1^{\tau} = \bigcap_{\sigma\in\Delta} X_1^{\sigma}$, deci $X_1^{\tau} = X_1^{\mu}$, $X_2^{\tau} = X_2^{\mu}$.

5. Fie

$$Y_2^{\beta} = \bigcup (\varphi\psi)^n \ (Y - \varphi(X)),$$
$$Y_1^{\beta} = Y - Y_2^{\beta},$$
$$X_2^{\beta} = \psi(Y_2^{\beta}),$$
$$X_1^{\beta} = X - X_2^{\beta}.$$

Să se arate că

$$Y_1^{\beta} = \varphi(X_1^{\beta}).$$

Într-adevăr,

$$Y_1^{\beta} = Y - Y_2^{\beta} = Y - [(Y - \varphi(X)) \cup \varphi\psi(Y_2^{\beta})] =$$
$$= [Y - (Y - \varphi(X))] \cap [Y - \varphi(\psi(Y_2^{\beta}))],$$

dar $\varphi(X) \subset Y$, $\varphi(\psi(Y_2^\beta)) \subset \varphi(\psi(Y)) \subset \varphi(X)$,

deci $Y_1^\beta = \varphi(X) - \varphi(\psi(Y_2^\beta)) = \varphi(X) - \varphi(X_2^\beta) =$

$= \varphi(X - X_2^\beta) = \varphi(X_1)$.

6. Avem

$$\mathfrak{N}_{\psi\varphi}(X) \subset X_2^\mu,$$

căci

$$\mathfrak{N}_{\psi\varphi}(X) = \bigcap_{n=0}^{\infty} (\psi\varphi)^n(X),$$

iar

$$\mathfrak{N}_{\psi\varphi}(X) \cap X_1 = \emptyset,$$

căci

$$\mathfrak{N}_{\psi\varphi}(X) \subset \psi(Y), \quad \text{deci} \quad [\mathfrak{N}_{\psi\varphi}(X)] \cap [X - \varphi(Y)] = \emptyset,$$

deci

$$\{(\psi\varphi)^n [X - \varphi(Y)]\} \cap (\psi\varphi)\, \mathfrak{N}_{\psi\varphi}(X) = \emptyset.$$

7. Avem

$$X_2^\mu \subset \mathfrak{N}_{\psi\varphi}(X) \cup X_2^\lambda,$$

căci, deoarece

$$X_2^\mu = \psi(Y) - \bigcup_{n=1}^{\infty} (\psi\varphi)^n (X - \varphi(Y)),$$

din $a \in X_2^\mu$ deduc $a \in \psi(Y)$ și $a \notin (\psi\varphi)^n (X - \varphi(y))$.

Se prezintă deci trei cazuri:

α) $a \in (\psi\varphi)^n(X)$ pentru orice n, deci $a \in \mathfrak{N}_{\psi\varphi}(X)$,

β) există un n cu $a \in (\psi\varphi)^n \psi(Y)$, dar $a \notin (\psi\varphi)^{n+1} \psi(Y)$, deci $a \in (\psi\varphi)^n \psi(Y - \varphi(X))$, deci $a \in X_2^\lambda$;

γ) există un n astfel ca $a \in (\psi\varphi)^n(X)$, dar $a \notin (\psi\varphi)^n \psi(Y)$, deci $a \notin (\psi\varphi)^n (X - \psi(Y))$, deci $a \in X_2^\mu$.

Deci, din $X_2^\lambda \subset X_2^\mu$ deduc

$$X_2^\lambda = X_2^\mu \cup \mathfrak{N}_{\psi\varphi}(X),$$

cu

$$X_2^\mu \cap \mathfrak{N}_{\psi\varphi}(X) = \emptyset.$$

V

Algebre booleene

Dacă privim felul cum se desfășoară capitolele I—IV sîntem izbiți de faptul că în capitolul I proprietățile 1.1—1.42 nu au fost demonstrate cititorul a fost îndemnat să privească figurile 1—21 și să constate că proprietățile sînt intuitiv justificate.

Acest mod de a proceda nu este însă cel al matematicienilor, decît dacă am considera proprietățile 1.1—1.42 ca axiome; cu definițiile 1.43, 1.58, 1.59, 1.76, 1.84—1.87, 1.99, 1.107, 1.115, 1.121 axiomele 1.1—1.42 dau teoremele 1.44—1.57, 1.60—1.75, 1.77—1.83, 1.88—1.98, 1.100—1.106, 1.108—1.114, 1.116—1.120, 1.122, 1.123 și teoremele I, II de la pp. 33 și 35.

Considerînd ca axiome pe 1.1—1.42, explicațiile date în text la pp. 9—25 servesc pentru a justifica introducerea acestor axiome; sistemul de axiome 1.1—1.42 a fost sugerat de proprietățile mulțimilor considerate ca cunoscute intuitiv.

Sînt însă proprietățile 1.1—1.42 independente? Nu pot fi ele toate deduse din cîteva dintre ele? Vom dovedi în cele ce urmează că acesta este cazul.

Numim *algebră booleană* o mulțime B în care se dau o relație „ $\sqsubset$ “ și două legi de compoziție binare [1] „ $\cap$ “

[1] Prin lege de compoziție binară în mulțimea M se înțelege o funcție $M \times M \to M$.

și „$\cup$“ precum și o funcție de o variabilă „$-$“ cu următoarele axiome:

Axiomele grupului I (Axiomele ordinii parțiale)

I.1 $a \subset a$,
I.2 dacă $a \subset b$ și $b \subset c$, atunci $a \subset c$,
I.3 dacă $a \subset b$ și $b \subset a$, atunci $a = b$.

Axiomele grupului II. (Axiomele laticelor)

II.1 $a \cap b \subset a$,
II.2 $a \cap b \subset b$,
II.3 dacă $x \subset a$ și $x \subset b$, atunci $x \subset a \cap b$,
II.4 $a \subset a \cup b$,
II.5 $b \subset a \cup b$,
II.6 dacă $a \subset y$ și $b \subset y$, atunci $a \cup b \subset y$.

Axiomele grupului III. (Axiomele distributive)

III.1 $x \cap (y \cup z) \subset (x \cap y) \cup (x \cap z)$,
III.2 $x \cup (y \cap z) \supset (x \cup y) \cap (x \cup z)$.

Axiomele grupului IV. (Axiomele algebrelor booleene)

IV.1 $(x \cap \bar{x}) \cup y \subset y$,
IV.2 $(x \cup \bar{x}) \cap y \supset y$.

Este evident că IV.1 și IV.2 se pot scrie

$$x \cap \bar{x} \subset y \subset z \cup \bar{z}.$$

Axiomele scrise mai sus sînt satisfăcute de mulțimi, căci

I.1	I.2	I.3	II.1	II.2	II.3	II.4	II.5	II.6	III.1	III.2
1.1	1.2	1.3	1.17	1.18	1.9	1.10	1.33	1.34		

Din 1.37, 1.38 și 1.28, 1.31 se deduc IV.

Deci:

Teoremă. *Mulțimile formează o algebră booleană.*

Precum am arătat în cap. I, prin mulțimi înțelegem submulțimile lui I. Această teoremă nu a fost demonstrată, căci 1.1—1.42 nu au fost demonstrate.

O mulțime $\mathfrak{L}$ în care sînt valabile axiomele I și II precum și *axioma*

$$x \cap (x \cup y) = x \cup (x \cap y) = x \qquad \text{(A)}$$

se numește *o latice*. Într-o latice sînt valabile următoarele proprietăți:

dacă $a \subset b$, $c \subset d$, atunci $a \cap c \subset b \cap d$ și $a \cup c \subset b \cup d$

$a \cap a = a$, $a \cup a = a$,
$a \cap b = b \cap a$, $a \cup b = b \cup a$,
$a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$, $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$,
$a \cap (a \cup b) = a$, $a \cup (a \cap b) = a$,
$a \cap (b \cup c) \subset (a \cap b) \cup (a \cap c)$, $a \cup (b \cap c) \supset (a \cup b) \cap (a \cup c)$,
$a \subset b$ echivalează cu $a \cap b = a$ sau cu $a \cup b = b$.

Demonstrație: $a \cap c \subset a \subset b$, $a \cap c \subset c \subset d$, deci cu II.3, $a \cap c \subset b \cap d$. Analog $a \cup c \subset b \cup d$

$a \cap a \subset a$ din II.1 și $a \subset a$, $a \subset a$ din I.1, deci din II.3 $a \subset a \cap a$; deci din I.3 $a \cap a = a$. Analog $a \cup a = a$.

$a \cap b \subset b$, $a \cap b \subset a$ din II.2, II.1 deci din II.3, $a \cap b \subset b \cap a$, deci prin schimbarea numelui literelor $b \cap a \subset a \cap b$, deci $a \cap b = b \cap a$. Analog $a \cup b = b \cup a$.

$a \cap (b \cap c) \subset a$, $a \cap (b \cap c) \subset b \cap c \subset b$, $a \cap (b \cap c) \subset b \cap c \subset c$ din II.1.2. Dar $a \cap (b \subset c) \subset a$, $a \cap (b \cap c) \subset b$ cu II.3 dă $a \cap (b \cap c) \subset a \cap b$; acesta cu $a \cap (b \cap c) \subset c$ dă, cu II.3, $a \cap (b \cap c) \subset (a \cap b) \cap c$. Analog $(a \cap b) \cap c \subset a \cap (b \cap c)$, deci $a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$. Analog $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$.

$a \cap (a \cup b) \subset a$ din II.1. Dar $a \subset a$ din I.1 și $a \subset a \cup b$ din II.4, deci din II.3 $a \subset a \cap (a \cup b)$, deci cu I.3. $a = a \cap (a \cup b)$. Analog $a = a \cup (a \cap b)$.

$a \cap b \subset a$, $a \cap c \subset a$ din II.1, deci din II.6; $(a \cap b) \cup (a \cap c) \subset a$. $a \cap b \subset b \subset b \cup c$, $a \cap c \subset c \subset b \cup c$ din I.2 și II.1, II.2, II.4, II.5, deci cu II.6 $(a \cap b) \cup (a \cap c) \subset b \cup c$. Dar $(a \cap b) \cup (a \cap c) \subset a$ și $(a \cap b) \cup (a \cap c) \subset b \cup c$, cu II.3 dă $(a \cap b) \cup (a \cap c) \subset a \cap (b \cup c)$. Analog $(a \cup b) \cap (a \cup c) \subset a \cup (b \cap c)$.

$a \subset b$ cu $a \subset a$ dă $a \subset a \cap b$, deci cu II.1 $a = a \cap b$, $a = a \cap b \subset b$ dă $a \subset b$. Analog $a \subset b$ echivalează cu $a \cup b = b$.

Într-o latice, III.1 și III.2 sînt echivalente

Dacă III.1 este satisfăcută, împreună cu proprietatea $(x \cap y) \cup (x \cap z) \subset x \cap (y \cup z)$ avem $(x \cap y) \cup (x \cap z) = x \cap$

$\cap (y \cup z)$. Deci $(x \cup y) \cap (x \cup z) = [(x \cup y) \cap x] \cup [(x \cup z) \cap z] =$
$= x \cup [(x \cup y) \cap z] = x \cup [(x \cap z) \cup (y \cap z)] = [x \cup (x \cap z)] \cup$
$\cup (y \cap z) = x \cup (y \cap z)$, deci III.2. Din III.2 se deduce III.1; demonstrația ca exercițiu:

O latice în care III.1 și III.2 sînt satisfăcute este numită o latice distributivă, căci în ea avem

$$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c),$$

$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c).$$

Aceste relații sînt 1.33 și 1.34.

Proprietățile dovedite sînt: 1.4, 1.5, 1.8, 1.16, 1.12, 1.13, 1.35, 1.11 și 1.19.

Într-o algebră booleană, axioma IV arată că $x \cap \bar{x} = y \cap \bar{y}$, $x \cup \bar{x} = y \cup \bar{y}$, deci $x \cap \bar{x}$ și $x \cup \bar{x}$ sînt constante. Aceste constante vor fi numite 0 și 1.

$$x \cap \bar{x} = 0,$$

$$x \cup \bar{x} = 1,$$

sînt tocmai 1.38, 1.37, iar

$$0 \subset z \subset 1$$

sînt 1.28, 1.31, dar $\emptyset$ este numit aici 0, iar I este numit 1. Din aceste proprietăți se deduc 1.27, 1.32

$$0 \cap z = 0,$$

$$0 \cup z = z,$$

$$1 \cap z = z,$$

$$1 \cup z = 1.$$

Orice algebră booleană este o latice. Pentru a dovedi această afirmație, e necesar să demonstrăm legile (A); avem $x \cap (x \cup y) = (x \cup 0) \cap (x \cup y) = x \cup (0 \cap y) =$
$= x \cup 0 = x$ și $x \cup (x \cap y) = (x \cap 1) \cup (x \cap y) = x \cap$
$\cap (1 \cup y) = x \cap 1 = x$, deci demonstrația e dată.

Teoremă. Într-o algebră booleană *sistemul de ecuații*

$$c \cap x = 0,$$

$$c \cup x = 1$$

are o soluție unică $x = \bar{c}$, căci dacă

$$c \cap y = 0,$$
$$c \cup y = 1,$$

atunci $y = y \cap 1 = y \cap (c \cup x) = (c \cap y) \cup (x \cap y) = 0 \cup (x \cap y) = (c \cap x) \cup (x \cap y) = x \cap (c \cup y) = x \cap 1 = x$.

Corolar I.

$$\bar{\bar{c}} = c,$$

căci

$$\bar{c} \cap \bar{\bar{c}} = 0,$$
$$\bar{c} \cup \bar{\bar{c}} = 1$$

și

$$\bar{c} \cap c = 0,$$
$$\bar{c} \cup c = 1.$$

Corolar II.

$$\overline{a \cap b} = \bar{a} \cup \bar{b},$$

căci

$$(a \cap b) \cap (\bar{a} \cup \bar{b}) = (a \cap b \cap \bar{a}) \cup (a \cap b \cap \bar{b}) = 0,$$
$$(a \cap b) \cup (\bar{a} \cup \bar{b}) = (a \cup \bar{a} \cup \bar{b}) \cap (b \cup \bar{a} \cup \bar{b}) = 1,$$

deci

$$\overline{a \cap b} = \bar{a} \cup \bar{b}.$$

Corolar III.

$$\overline{a \cup b} = \bar{a} \cap \bar{b},$$

căci

$$(a \cup b) \cap (\bar{a} \cap \bar{b}) = (a \cap \bar{a} \cap \bar{b}) \cup (b \cap \bar{a} \cap \bar{b}) = 0,$$
$$(a \cup b) \cup (\bar{a} \cap \bar{b}) = (a \cup b \cup \bar{a}) \cap (a \cup b \cup \bar{b}) = 1.$$

Corolarele I-III sînt 1.39, 1.40, 1.41.

Corolar IV. Dacă $a \subset b$, *atunci* $\bar{b} \subset \bar{a}$, căci din $a \cap b = a$, deducem $\bar{a} \cup \bar{b} = \overline{a \cap b} = \bar{a}$; acest corolar este 1.42.

În acest mod, proprietățile 1.1—1.42 sînt dovedite în orice algebră booleană. Dar proprietățile mulțimilor studiate în cap. IV cer introducerea de reuniuni și intersecții infinite de elemente ale unei algebre booleene:

$$\bigcup_{a \in M} a \qquad \bigcap_{a \in M} a;$$

algebrele booleene cu reuniuni și intersecții infinite sînt numite *algebre booleene continue* sau *complete*. Studiul lor, foarte important, cere ca aceste reuniuni și intersecții să fie extinse la mulțimi M, deci cere un studiu al algebrei mulțimilor ca atare. De asemenea, produsul cartezian introdus în cap. II și IV este un produs cartezian de mulțimi, nu de elemente ale unei algebre booleene.

Este deci necesar să fundăm algebra mulțimilor.

Dacă cercetăm capitolul II, observăm că axiomele grupurilor I-III se regăsesc în

Axiomele algebrelor booleene	I.1	I.2	I.3	II.1	II.2	II.3	II.4	II.5	II.6	III.1.	III.2
Proprietăți ale relațiilor	2.1	2.2		2.3	2.4		2.11	2.12	2.18	2.19	

Totuși nu putem încă afirma că *relațiile binare formează o algebră booleană*. Într-adevăr, în toate formulele 2.1—2.28 nu apare o relație de egalitate între relații, ci relația de echivalență „$\Leftrightarrow$“. Această relație „$\Leftrightarrow$“ este reflexivă, simetrică și tranzitivă. Putem considera ceea ce se numește o „relație în extensiune“, care este o clasă de relații echivalente în raport cu „$\Leftrightarrow$“.

Pentru a putea introduce „conjuncția“, „disjuncția“ și „negația“ relațiilor este nevoie să dovedim că aceste legi de compoziție sînt compatibile cu „$\Leftrightarrow$“, deci să dovedim *condiția de compatibilitate*:

Dacă $R \Leftrightarrow S$, $T \Leftrightarrow W$, *atunci* $(R \,\&\, T) \Leftrightarrow (S \,\&\, W)$, $(R \vee T) \Leftrightarrow (S \vee W)$ și $\bar{R} \Leftrightarrow \bar{S}$.

Cît despre proprietățile IV.1 și IV.2, să observăm că așa-numitul principiu al contradicției e valabil

pentru nici o pereche a, b nu avem aRb și $a \not R b$, deci

($a R b$ și $a \not R b$) sau $a S b$ echivalează cu $a S b$. Principiul terțiului exclus se enunță

oricare ar fi a și b avem: $a R b$ sau măcar $a \not R b$, deci

($a R b$ sau măcar $a \not R b$) și $a S b$ echivalează cu $a S b$.

Aceste proprietăți se scriu

$$(R \,\&\, \not R) \vee S \Leftrightarrow S,$$

$$(R \vee \not R) \,\&\, S \Leftrightarrow S,$$

deci dau

$$(R \,\&\, \not R) \vee S \Rightarrow S,$$

$$S \Rightarrow (R \vee \not R) \,\&\, S.$$

Putem deci afirma că

Relațiile binare formează o algebră booleană, pentru care relația de egalitate este „$\Leftrightarrow$"

Exerciții.

Să se interpreteze toate proprietățile 1.1—1.42 pentru relații.

Relațiile nu constituie însă o algebră booleană oarecare, ci o algebră booleană în care există

α) o lege de compoziție: *produsul* a două relații RS;

β) o *transpusă* $\breve{R}$ a fiecărei relații.

Transpusa satisface condițiile:

$$\breve{\breve{R}} = R,$$

$$\widecheck{R \cap S} = \breve{R} \cap \breve{S},$$

$$\widecheck{R \cup S} = \breve{R} \cup \breve{S},$$

iar produsul este asociativ:

$$R(ST) = (RS)T$$

și satisface condiția

$$\widehat{RS} = \widetilde{S}\,\widetilde{R}.$$

ALGEBRA BOOLEANĂ $\mathfrak{Q}_2$

Numim

$$\mathfrak{Q}_2 = (0, 1)$$

Vom defini în $\mathfrak{Q}_2$

α) funcția

$$x \to \bar{x}$$

prin $\quad \bar{0} = 1 \quad \bar{1} = 0$

β) funcțiile „$\cup$" și „$\cap$" prin

$\cap$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\cup$	0	1
0	0	1
1	1	1

deci

$$x \cap y = xy$$
$$x \cup y = x + y - xy$$

γ) relația „$\subset$" prin

$$0 \subset 0, \qquad 0 \subset 1, \qquad 1 \subset 1$$
$$1 \not\subset 0$$

Se arată ușor că

$\mathfrak{Q}_2$ *este o algebră booleană.*

Proprietățile I.1, I-2, I.3, II.1, II.2, II.4, II.5 sînt imediate iar IV.1, IV,2 decurg din

$$x \cap \bar{x} = 0 \qquad x \cup \bar{x} = 1$$

Proprietățile II.3, II.6, III.1, III.2 se verifică ușor.

Perechea de elemente (0, 1) este perechea de clase de resturi de întregi n modulo 2 *. Înmulțirea lor este dată de $xy = x \cap y$ iar suma lor de

+	0	1
0	0	1
1	1	0

Exerciții. Să se verifice că

1. $x + y = (x \cap \bar{y}) \cup (\bar{x} \cap y)$
$= (x \cup y) \cap (\bar{x} \cup \bar{y})$

2. $x \cup y = xy + x + y$

3. Să se calculeze în $\mathfrak{L}_2$ funcțiile : $-$, , $\rightarrow$, $\bar{+}$, $\perp$, $\top$, $\#$, (. , ,) definite la pp. 25 — 33.

---

* Vezi Gr. C. Moisil, *Introducere în algebră. I. Inele și ideale.* Editura Academiei R.P.R., București, 1954.

Gr. C. Moisil, *Teoria algebrică a mecanismelor automate*, Editura tehnică, București, 1959.

VI

Reducerea algebrei mulțimilor și a algebrei relațiilor la logica predicatelor

IMPLICAȚIA, CONJUNCȚIA, ECHIVALENȚA, DISJUNCȚIA ȘI NEGAȚIA

Dacă ne gîndim la întreg capitolul I și la întreg capitolul II, observăm că în ele apar propoziții de forma

$$x \in \alpha,$$

$$x \, R \, y.$$

Să analizăm definiția incluziunii mulțimilor dată la p. 10:

$$\alpha \subset \beta$$

înseamnă că oricare ar fi elementul $x \in \alpha$, el este și un element al lui β, deci

$$\text{dacă } x \in \alpha, \quad \text{atunci } x \in \beta.$$

Apare construcția în limba română:

dacă . atunci .

Vom scrie, p și q fiind propoziții,

$$p \to q,$$

în loc de:

dacă p, atunci q;

alte forme verbale au același înțeles:

— din p se deduce q;
— p are ca consecință pe q;
— p este o condiție suficientă pentru q;
— q este o condiție necesară a lui p.

Ultima formulare este echivalentă cu prima, căci a spune că q este o condiție necesară a lui p înseamnă a spune că nu putem avea pe p fără să-l avem pe q, deci că dacă îl avem pe p, trebuie să-l avem și pe q.

Așadar, definiția lui $\alpha \subset \beta$ este

$$(x \in \alpha) \rightarrow (x \in \beta).$$

Dacă considerăm două propoziții de forma $x\ R\ y$ și $x\ S\ y$, propoziția

$$(x\ R\ y) \rightarrow (x\ S\ y),$$

înseamnă:

$$\text{dacă } x\ R\ y, \text{ atunci } x\ S\ y,$$

ceea ce este definiția dată la p. 37 a relației de implicație

$$R \Rightarrow S$$

a relațiilor.

Semnul „$\rightarrow$" poartă numele de *implicație*: dacă p și q sînt propoziții, atunci și $p \rightarrow q$ va fi o propoziție.

Să considerăm proprietatea egalității $\alpha = \beta$ a două mulțimi, dată la p. 10:

$$\text{dacă } \alpha \subset \beta \text{ și } \beta \subset \alpha, \quad \text{atunci } \alpha = \beta;$$

proprietatea de reflexivitate a incluziunii se poate scrie:

$$\text{dacă } \alpha = \beta, \quad \text{atunci } \alpha \subset \beta \text{ și } \beta \subset \alpha.$$

Așadar, putem spune că $\alpha = \beta$ înseamnă că pentru orice x:

$$x \in \alpha, \text{ dacă și numai dacă } x \in \beta$$

sau

$x \in \alpha$ este condiție necesară și suficientă ca $x \in \beta$. Vom introduce semnul echivalenței „$\leftrightarrow$" a două propoziții propoziția

$$p \leftrightarrow q$$

este transcrierea simbolică a propozițiilor românești:

p dacă și numai dacă q

p este condiția necesară și suficientă ca q.

Egalitatea $\alpha = \beta$ a două mulțimi este caracterizată de

$$(x \in \alpha) \leftrightarrow (x \in \beta).$$

Propoziția

$$(a\ R\ y) \leftrightarrow (x\ S\ y)$$

înseamnă : $x\ R\ y$ dacă și numai dacă $x\ S\ y$; din definiția echivalenței relațiilor dată la p. 38 se vede că această propoziție traduce simbolic relația

$$R \Leftrightarrows S$$

Dar propoziția

$$r \leftrightarrow s$$

traduce propoziția în limba română

$$r \rightarrow s \text{ și } s \rightarrow r.$$

Dacă avem două propoziții p și q, propoziția

$$p \text{ și } q$$

se va scrie

$$p \,\&\, q,$$

semnul „&" fiind semnul *conjuncției* propozițiilor. Deci $r \leftrightarrow s$ înseamnă $(r \rightarrow s)\ \&\ (s \rightarrow r)$. Cu alte cuvinte, propoziția

$$(r \leftrightarrow s) \leftrightarrow [(r \rightarrow s)\ \&\ (s \rightarrow r)]$$

este întotdeauna adevărată, căci dacă $r \leftrightarrow s$, atunci avem simultan $r \rightarrow s$ și $s \rightarrow r$, deci avem $(r \rightarrow s)\ \&\ (s \rightarrow r)$ și dacă avem $(r \rightarrow s)\ \&\ (s \rightarrow r)$, atunci $r \leftrightarrow s$.

Să considerăm propoziția

$$(x \in \alpha)\ \&\ (x \in \beta).$$

Ea ne spune că x este un element comun și lui α și lui β, deci că este un element al lui $\alpha \cap \beta$, după definiția de la p. 15.

Tot astfel propoziția

$$(x\ R\ y)\ \&\ (x\ S\ y)$$

spune că x și y sînt și în relația R și în relația S, deci, după definiția de la p. 37-38, x și y sînt în relația $R \& S$.

Să considerăm definiția dată la p. 11 pentru reuniunea $\alpha \cup \beta$ a două mulțimi: $x \in \alpha \cup \beta$ înseamnă că x aparține măcar uneia din mulțimile α, β, deci că

$$x \in \alpha \text{ sau măcar } x \in \beta.$$

Dacă p, q sînt două propoziții, atunci vom scrie

$$p \vee q$$

în loc de

$$p \text{ sau măcar } q.$$

Să observăm că conjuncția „sau" are în limba română înțelesul exclusiv: „sau p sau q, dar nu și p și q"; acesta este înțelesul latinescului *aut* (de pildă *aut imperator, aut nihil*), asupra căruia poartă exercițiile de la p. 29.

În românește conjuncția „vel", care înseamnă „p sau q, dar poate și p și q", adică „măcar una din cele două propoziții p,q", adică „p sau măcar q" se traduce obișnuit cu „sau"; noi vom preciza: „sau măcar".

Semnul „$\vee$" este semnul *disjuncției*.

Vom defini mulțimea $\alpha \cup \beta$ prin

$$(x \in \alpha) \vee (x \in \beta),$$

iar

$$(x\, R\, y) \vee (x\, S\, y)$$

definește disjuncția relațiilor: relația $R \vee S$ de la p. 40.

Vom observa că propoziția

$$x \notin \alpha$$

este negația propoziției $x \in \alpha$; *negația* propoziției p va fi notată $\neg p$, deci $x \notin \alpha$ se mai scrie

$$\neg (x \in \alpha),$$

ceea ce introduce complementara $\bar{\alpha}$ a unei mulțimi α, definită la p. 23 $x \in \bar{\alpha}$, dacă și numai dacă $\neg (x \in \alpha)$.

Alte semne pentru negație: $\neg p$ se mai scrie

$$\sim p,\ Np,\ \bar{p},\ p'.$$

Negația $\mathcal{R}$ a relației R, dată la p. 39, este definită prin

$$(x \mathcal{R} y) \leftrightarrow \neg (x R y).$$

Semnele :

$\rightarrow$	implicația,
$\leftrightarrow$	echivalența,
$\&$	conjuncția,
$\vee$	disjuncția,
$\neg$	negația

fac ca unei propoziții p să-i corespundă propoziția $\neg p$, care este negația ei, și unei perechi de propoziții p, q să-i corespundă propozițiile.

$p \rightarrow q$	dacă p, atunci q;
$p \leftrightarrow q$	p dacă și numai dacă q;
$p \,\&\, q$	p și q;
$p \vee q$	p sau măcar q.

Am arătat că :

$$(x \in \alpha \cap \beta) \leftrightarrow [(x \in \alpha) \,\&\, (x \in \beta)]; \qquad (6.1\ *)$$

$$(x \in \alpha \cup \beta) \leftrightarrow [(x \in \alpha) \vee (x \in \cap)]; \qquad (6.2\ *)$$

$$(x \in \overline{\alpha}) \leftrightarrow \neg (x \in \alpha). \qquad (6.3\ *)$$

Exerciții:

Să se transcrie definițiile 1.43, 1.58, 1.76, 1.88, 1.99, 1.107, 1.121.

Răspuns :

$$(x \in \alpha - \beta) \rightarrow [(x \in \alpha) \,\&\, (\neg (x \in \beta))];$$

$$(x \in \alpha : \beta) \leftrightarrow [(x \in \alpha) \vee (\neg (x \in \beta))];$$

$$(x \in \alpha + \beta) \leftrightarrow \{[(x \in \alpha) \,\&\, (\neg (x \in \beta))] \vee [(\neg (x \in \alpha)) \,\&\, (x \in \beta)]\};$$

$$(x \in \alpha \dot{+} \beta) \leftrightarrow \{[(x \in \alpha) \vee (\neg (x \in \beta))] \,\&\, [(\neg (x \in \alpha)) \vee (x \in \beta)]\};$$

$$(x \in \alpha \perp \beta) \leftrightarrow [(\neg (x \in \alpha)) \vee (\neg (x \in \beta))];$$

$$(x \in \alpha \top \beta) \leftrightarrow [(\neg (x \in \alpha)) \,\&\, (\neg (x \in \beta))];$$

$$(x \in (\alpha, \beta, \gamma)) \leftrightarrow \{[(x \in \alpha) \,\&\, (x \in \beta)] \vee [(\neg (x \in \beta)) \,\&\, (x \in \gamma)]\}.$$

Exerciții

Să se traducă în limba română definițiile precedente.

Răspuns:

$x \in \alpha - \beta$: x este α, dar nu este β;
$x \in \alpha \rightarrow \beta$: dacă x este α, atunci este și β, x nu este α decît dacă este și β;
$x \in \alpha + \beta$: x este α, dar nu β sau x este β, dar nu α. Aceasta este traducerea latinescului *aut*: *aut* α *aut* β înseamnă „sau α sau β, dar nu și α și β" adică: „sau α, dar nu β" sau „β dar nu α";
$x \in \alpha \mp \beta$: mulțimea acelor x care dacă sînt α sînt și β, iar dacă nu sînt α nu sînt nici β;
$x \in \alpha \perp \beta$: mulțimea acelor x care dacă sînt α, atunci nu sînt β;
$x \in \alpha \top \beta$: nici α nici β.

Exemple de răspuns. Să se transcrie pentru relații definițiile date în exercițiile precedente pentru mulțimi. Menționăm:

$$x(R \,\&\, S)y \leftrightarrow [(x\ R\ y)\&(x\ S\ y)], \qquad (6.1\ **)$$

$$x(R \vee S)y \leftrightarrow [(x\ R\ y) \vee (x\ S\ y)], \qquad (6.2\ **)$$

$$(x\ \bar{R}\ y) \leftrightarrow [\neg(x\ R\ y)]. \qquad (6.3\ **)$$

TIPURI DE DEMONSTRAȚII

Teorema I. (Raționamentul prin modus ponens.) *Dacă*

$$p$$
$$p \rightarrow q,$$

atunci

$$q.$$

Căci dacă din p deducem q, atunci, o dată ce p este afirmat, afirm și pe q.

Teorema II. (Raționamentul prin adjuncțiune.) *Dacă*

$$p$$
$$q,$$

atunci

$$p \,\&\, q.$$

Teorema III. (Trecerea de la echivalență la implicație.)

Dacă

$$p \leftrightarrow q,$$

atunci

$$p \rightarrow q$$

și

$$q \rightarrow p.$$

Teorema IV. (Trecerea de la implicația reciprocă la echivalență.)

Dacă

$$p \rightarrow q$$
$$q \rightarrow p,$$

atunci

$$p \leftrightarrow q.$$

Teorema V. (Demonstrația prin silogism ipotetic).

Dacă

$$p \rightarrow q$$
$$q \rightarrow r,$$

atunci

$$p \rightarrow r.$$

Într-adevăr, dacă din p se deduce q și din q se deduce r, atunci din p se deduce r.

Teorema VI. (Demonstrația prin silogism ipotetic cu echivalență.)

Dacă

$$p \quad q,$$
$$q \leftrightarrow r,$$

atunci

$$p \leftrightarrow r.$$

Într-adevăr, dacă condiția necesară și suficientă a lui p este q și dacă condiția necesară și suficientă a lui q este r, atunci condiția necesară și suficientă a lui p este r.

Evident, teoremele se pot extinde, pentru a căpăta tipurile de raționament de mai jos:

$$p_1 \rightarrow p_2,$$
$$p_2 \rightarrow p_3,$$

$$\frac{p_{n-1} \rightarrow p_n}{p_1 \rightarrow p_n},$$

și

$$p_1 \leftrightarrow p_2,$$
$$p_2 \leftrightarrow p_3,$$

$$\frac{p_{n-1} \leftrightarrow p_n}{p_1 \leftrightarrow p_n}.$$

Dacă însă avem $p_i \leftrightarrow p_{i+1}$, dar $p_j \rightarrow p_{j+1}$, atunci concluzia este o implicație.

Teorema VII. (Principiul dilemei.)

Dacă

$$p \vee q$$

și dacă

$$p \rightarrow r,$$
$$q \rightarrow r,$$

atunci

$$r.$$

Căci sînt două cazuri posibile: p și q și din amîndouă aceste premise deducem pe r.

Propoziția

$$(p \to p) \tag{6.4}$$

este totdeauna adevărată, cum se înțelege ușor cînd o traducem în limba română.

dacă p, atunci p,

de pildă:

dacă plouă, atunci plouă,

sau sub forma

dacă Hector ar fi cățel, atunci Hector ar fi cățel.

Așadar,

$$(x \in \alpha) \to (x \in \alpha), \tag{6.4 *}$$

ceea ce înseamnă, în virtutea celor spuse la p. 122,

$$\alpha \subset \alpha,$$

care este proprietatea 1.1 de reflexivitate a incluziunii;

$$(x\ R\ y) \to (x\ R\ y), \tag{6.4 **}$$

ceea ce înseamnă, în virtutea celor spuse la p. 122,

$$R \Rightarrow R,$$

aceasta este proprietatea de reflexivitate a implicației relațiilor.

Propozițiile

$$(p\ \&\ q) \to (p), \tag{6.5}$$

$$(p\ \&\ q) \to (q), \tag{6.6}$$

$$(p) \to (p \vee q), \tag{6.7}$$

$$(q) \to (p \vee q) \tag{6.8}$$

sînt totdeauna adevărate.

Într-adevăr, din $p \,\&\, q$ se deduce și p și q ; pe de altă parte, atît din p cît și din q se deduce că măcar una din două este valabilă.

Să luăm ca p, q propozițiile $x \in \alpha$, $x \in \beta$. Avem propozițiile totdeauna adevărate

$$[(x \in \alpha) \,\&\, (x \in \beta)] \to (x \in \alpha); \qquad (6.5\ *)$$

$$[(x \in \alpha) \,\&\, (x \in \beta)] \to (x \in \beta); \qquad (6.6\ *)$$

$$(x \in \alpha) \to [(x \in \alpha) \vee (x \in \beta)]; \qquad (6.7\ *)$$

$$(x \in \beta) \to [(x \in \alpha) \vee (x \in \beta)]. \qquad (6.8\ *)$$

Putem forma astfel o demonstrație :

$$[x \in (\alpha \cap \beta)] \leftrightarrow [(x \in \alpha) \,\&\, (x \in \beta)]; \qquad (6.1\ *)$$

$$[(x \in \alpha) \,\&\, (x \in \beta)] \to (x \in \alpha); \qquad (6.5\ *)$$

$$[x \in (\alpha \cap \beta)] \to (x \in \alpha),$$

care ne arată că II.1

$$\alpha \cap \beta \subset \alpha$$

este adevărată și, analog, alte trei demonstrații care dovedesc pe II.2, II.4, II.5.

Să luăm ca p, q propozițiile $x\,R\,y$, $x\,S\,y$; obținem din (6.4) — (6.7) :

$$[(x\,R\,y) \,\&\, (x\,S\,y)] \to (x\,R\,y); \qquad (6.5\ **)$$

$$[(x\,R\,y) \,\&\, (x\,S\,y)] \to (x\,S\,y); \qquad (6.6\ **)$$

$$(x\,R\,y) \to [(x\,R\,y) \vee (x\,S\,y)]; \qquad (6.7\ **)$$

$$(x\,S\,y) \to [(x\,R\,y) \vee (x\,S\,y)]. \qquad (6.8\ **)$$

Putem forma astfel o demonstrație :

$$[x(R \,\&\, S)\,y] \leftrightarrow [(x\,R\,y) \,\&\, (x\,S\,y)], \qquad (6.1**)$$

$$\underline{[(x\,R\,y) \,\&\, (x\,S\,y)\,[\to (x\,R\,y)} \qquad (6.5**)$$

$$[x(R \,\&\, S)\,y] \to (x\,R\,y),$$

ceea ce ne dovedește pe II.1 pentru relații (2.3) sub forma

$$(R \,\&\, S) \Rightarrow R,$$

analog pentru II.2, II.4, II.5.

Propozițiile

$$[p \,\&\, (q \vee r)] \to [(p \,\&\, q) \vee (p \,\&\, r)], \qquad (6.9)$$

$$[(p \vee q) \,\&\, (p \vee r)] \to [p \vee (q \,\&\, r)] \qquad (6.10)$$

sînt totdeauna adevărate.

Într-adevăr, $p \,\&\, (q \vee r)$ afirmă pe p și dilema $q \vee r$; dacă q, p fiind afirmat avem $p \,\&\, q$; dacă r, p fiind afirmat, avem $p \,\&\, r$. Deci $(p \,\&\, q) \vee (p \,\&\, r)$.

Dacă avem simultan $p \vee q$, $p \vee r$, avem patru cazuri, după cum luăm primul sau al doilea caz în fiecare dilemă

α) p și p, deci p;

β) p și r, caz absorbit de precedentul;

γ) q și p, caz absorbit de anteprecedentul;

δ) q și r,

deci avem $p \vee (q \,\&\, r)$, deci am justificat (6.9).

Fie $x \in \alpha$, $x \in \beta$, $x \in \gamma$ propozițiile p, q, r; (6.9) și (6.10) dau

$$\{(x \in \alpha) \,\&\, [(x \in \beta) \vee (x \in \gamma)]\} \to \{[(x \in \alpha) \,\&\, (x \in \beta)] \vee [(x \in \alpha) \,\&\, (x \in \gamma)]\}; \qquad (6.9\,*)$$

$$\{(x \in \alpha) \vee [(x \in \beta) \,\&\, (x \in \gamma)]\} \to \{[(x \in \alpha) \vee (x \in \beta)] \,\&\, [(x \in \alpha) \vee (x \in \gamma)]\}. \qquad (6.10\,*)$$

Am putea forma o demonstrație:

$$[x \in (\alpha \cap (\beta \cup \gamma))] \leftrightarrow [(x \in \alpha) \,\&\, (x \in (\beta \cup \gamma))]; \qquad (6.1\,*)$$

$$[(x \in \alpha) \,\&\, (x \in (\beta \cup \gamma))] \leftrightarrow \{(x \in \alpha) \,\&\, [(x \in \beta) \vee (x \in \gamma)]\}; \qquad (a)$$

$$\{[(x \in \alpha) \,\&\, [(x \in \beta) \vee (x \in \gamma)]\} \to \{[(x \in \alpha) \,\&\, (x \in \beta)] \vee [(x \in \alpha) \,\&\, (x \in \gamma)]\}; \qquad (6.9*)$$

$$\{[(x \in \alpha) \,\&\, (x \in \beta)] \vee [(x \in \alpha) \,\&\, (x \in \gamma)]\} \leftrightarrow \{[x \in (\alpha \cap \beta)] \vee [x \in (\alpha \cap \gamma)]\}. \qquad (b)$$

$$\{[x \in (\alpha \cap \beta)] \vee [x \in (\alpha \cap \gamma)]\} \to [x \in ((\alpha \cap \beta) \cup (\alpha \cap \gamma))] \qquad (6.2*)$$

$$[x \in (\alpha \cap (\beta \cup \gamma))] \to [x \in ((\alpha \cap \beta) \cup (\alpha \cap \gamma))], \qquad (6.9°)$$

dacă am ști că (a), (b) sînt întotdeauna adevărate; în acest caz, am fi dovedit III.1. Pentru a dovedi pe (a) și (b) folosim următoarea lemă:

Propozițiile:

$$(p \leftrightarrow q) \rightarrow [(r \ \& \ p) \leftrightarrow (r \ \& \ q)], \tag{6.11}$$

$$(p \leftrightarrow q) \rightarrow [(p \ \& \ s) \leftrightarrow (q \ \& \ s)], \tag{6.12}$$

$$(p \leftrightarrow q) \rightarrow [(r \vee p) \leftrightarrow (r \vee q)] \tag{6.13}$$

$$(p \leftrightarrow q) \rightarrow [(p \vee s) \leftrightarrow (q \vee s)] \tag{6.14}$$

sînt totdeauna adevărate.

Într-adevăr, dacă p și q sînt echivalente, $r \ \& \ p$ și $r \& q$ vor fi de asemenea echivalente, deci (6.11). Analog în celelalte cazuri.

Din (6.11) deducem

$$\{[x \in (\beta \cup \gamma)] \leftrightarrow [(x \in \beta) \vee (x \in \gamma)]\} \rightarrow (\{(x \in \alpha) \ \& \ [x \in (\beta \cup \gamma)]\} \leftrightarrow \{(x \in \alpha) \ \& \ [(x \in \beta) \vee (x \in \gamma)]\}), \tag{6.11 *}$$

iar cu (6.2 *) și (6.11 *) formăm o demonstrație prin modus ponens, care arată că (a) este întotdeauna adevărată.

Din 6.14 deducem

$$\{[(x \in \alpha) \ \& \ (x \in \beta)] \leftrightarrow [x \in (\alpha \cap \beta)]\} \rightarrow (\{[(x \in \alpha) \ \& \ (x \in \beta)] \vee [(x \in \alpha) \ \& \ (x \in \gamma)]\} \leftrightarrow \{[x \in (\alpha \cap \beta)] \vee [(x \in \alpha) \ \& \ (x \in \gamma)]\}), \tag{c}$$

dar cu 6.1 * și (c) formăm o demonstrație în modus ponens, care dă

$$\{[(x \in \alpha) \ \& \ (x \in \beta)] \vee [(x \in \alpha) \ \& \ (x \in \gamma)]\} \leftrightarrow \leftrightarrow \{[x \in (\alpha \cap \beta)] \vee [(x \in \alpha) \ \& \ (x \in \gamma)]\}. \tag{d}$$

Din (6.14) deducem

$$\{[(x \in \alpha) \ \& \ (x \in \gamma)] \leftrightarrow [x \in (\alpha \cap \gamma)]\} \rightarrow (\{[x \in (\alpha \cap \beta)] \vee [(x \in \alpha) \ \& \ (x \in \gamma)]\} \leftrightarrow \{[x \in (\alpha \cap \beta)] \vee [x \in (\alpha \cap \gamma)]\}), \tag{e}$$

dar 6.1 * și (e) dă o demonstrație în modus ponens, deci

$$\{[x \in (\alpha \cap \beta)] \vee [(x \in \alpha) \,\&\, (x \in {}^{\circ}\gamma)]\} \leftrightarrow \{[x \in (\alpha \cap \beta)] \vee [x \in (\alpha \cap \gamma)]\}. \quad \text{(f)}$$

Dar (d), (f), (b) formează o demonstrație în silogism ipotetic, deci *b* este totdeauna adevărată.

Deci (6.1 *), (*a*), (6.9 *), (*b*), (6.2 *) este o demonstrație, deci III.1

$$[x \in (\alpha \cap (\beta \cup \gamma))] \rightarrow [x \in ((\alpha \cap \beta) \cup (\alpha \cap \gamma))]$$

este adevărată.

Ca exercițiu, lăsăm pe seama cititorului demonstrația lui III.2. De asemenea, lăsăm pe seama cititorului demonstrația în cazul relațiilor.

Propozițiile :

$$[(p \;\&(\neg p)) \vee q] \rightarrow q, \quad (6.15)$$

$$p \rightarrow [p \,\&\, (q \vee (\neg q))] \quad (6.16)$$

sînt întotdeauna adevărate.

Ipoteza $p \,\&\, (\neg p)$ — vom scrie $p \,\&\, \neg p$ — este întotdeauna falsă, deci $(p \,\&\, \neg p) \vee q$ este chiar q; deci 6.15.

Propoziția $q \vee (\neg q)$ este întotdeauna adevărată, deci $p \,\&\, (q \vee (\neg q))$ se reduce la p, deci 6.16.

Luînd p, q ca $x \in \alpha$, $x \in \beta$, avem :

$$\{[(x \in \alpha) \,\&\, \neg(x \in \alpha)] \vee (x \in \beta)\} \rightarrow (x \in \beta), \quad (6.15\ *)$$

$$(x \in \alpha) \rightarrow \{(x \in \alpha) \,\&\, [(x \in \beta) \vee \neg(x \in \beta)]\}. \quad (6.16\ *)$$

Șirul

$$[x \in ((\alpha \cap \bar{\alpha}) \cup \beta)] \leftrightarrow \{[x \in (\alpha \cap \bar{\alpha})] \vee (x \in \beta)\}, \quad (6.2\ *)$$

$$\{[x \in (\alpha \cap \bar{\alpha})] \vee (x \in \beta)\} \leftrightarrow \{[(x \in \alpha) \,\&\, (x \in \bar{\alpha})] \vee (x \in \beta)\}, \quad \text{(a)}$$

$$\{[(x \in \alpha) \,\&\, (x \in \bar{\alpha})] \vee (x \in \beta)\} \leftrightarrow \{[(x \in \alpha) \,\&\, \neg(x \in \alpha)] \vee (x \in \beta)\}, \quad \text{(b)}$$

$$\{[(x \in \alpha) \,\&\, \neg(x \in \alpha)] \vee (x \in \beta)\} \rightarrow (x \in \beta) \quad (6.15\ *)$$

ar fi o demonstrație, dacă (*a*) și (*b*) ar fi întotdeauna adevărate. Acest lucru vrem să-l dovedim:

$$\{[x \in (\alpha \cap \bar{\alpha})] \leftrightarrow [(x \in \alpha) \,\&\, (x \in \bar{\alpha})]\} \rightarrow (\{[x \in (\alpha \cap \bar{\alpha})] \vee (x \in \beta)\} \leftrightarrow \{[(x \in \alpha) \,\&\, (x \in \bar{\alpha})] \vee (x \in \beta)\}) \quad (6.14^*)$$

6.1 * și 6.8 * dau prin modus ponens pe (a), care e deci adevărată:

$$[(x \in \neg) \leftrightarrow \neg(x \in \alpha)] \rightarrow \{[(x \in \alpha) \,\&\, (x \in \bar{\alpha})] \leftrightarrow [(x \in \alpha) \,\&\, \neg \neg(x \in \alpha)]\}. \quad (c)$$

Prin modus ponens, 6.3* și (c) dau

$$[(x \in \alpha) \,\&\, (x \in \bar{\alpha})] \leftrightarrow [(x \in \alpha) \,\&\, \neg(x \in \alpha)]. \quad (d)$$

Dar. 6.11 * dă

$$\{[(x \in \alpha) \,\&\, (x \in \alpha)] \leftrightarrow [(x \in \alpha) \,\&\, \neg(x \in \alpha)]\} \rightarrow \rightarrow (\{[(x \in \alpha) \,\&\, (x \in \bar{\alpha})] \vee (x \in \beta)\} \leftrightarrow \leftrightarrow \{[(x \in \alpha) \,\&\, \neg(x \in \alpha)] \vee (x \in \beta)\}), \quad (e)$$

în timp ce (d) și (e) cu modus ponens dau (b), deci (b) este dovedită, deci este dovedit că

$$[x \in ((\alpha \cap \alpha) \cup \beta)] \rightarrow (x \in \beta),$$

deci

$$(\alpha \cap \bar{\alpha}) \cup \beta \subset \beta,$$

deci IV.1. Lăsăm ca exercițiu dovedirea lui IV.2, precum și ale proprietăților analoge în cazul relațiilor.

CUANTORUL UNIVERSAL

Propozițiile 6.4 * — 6.28* conțin variabila individuală x, iar 6.4** — 6.28** conțin variabilele individuale x, y.

Să plecăm de la definiția incluziunii claselor $\alpha \subset \beta$, pe care o enunțăm:

oricare ar fi individul x: $(x \in \alpha) \rightarrow (x \in \beta)$,

și de la definiția implicației relațiilor $R \Rightarrow S$, pe care o enunțăm :

oricare ar fi indivizii $x,y : (x\ R\ x) \rightarrow (x\ S\ y)$.

Apare o idee nouă : „oricare ar fi x". Vom scrie

$$(x)\ p$$

în loc de

oricare ar fi $x : p$,

deci

$$(\alpha \subset \beta) \leftrightarrow (x)\ [(x \in \alpha) \rightarrow (x \in \beta)], \qquad (6.17°)$$

$$(\alpha = \beta) \leftrightarrow (x)\ [(x \in \alpha) \leftrightarrow (x \in \beta)]. \qquad (6.18°)$$

În implicația relațiilor putem, plecînd de la $(x\ R\ y) \rightarrow (x\ S\ y)$ să formăm pe

$$(y)[(x\ R\ y) \rightarrow (x\ S\ y)]$$

care înseamnă :

dat fiind x, oricare ar fi $y : (x\ R\ y) \rightarrow (x\ S\ y)$. Aceasta este o proprietate a lui x.

Să luăm un exemplu : Fie relațiile „$\subset$" și „$=$" pentru mulțimi și proprietatea lui α, pe care o numim $P(\alpha)$:

$$(\beta)[(\alpha \subset \beta) \rightarrow (\alpha = \beta)].$$

Mulțimea vidă nu are proprietatea P, căci $\emptyset \subset \beta$ și $\emptyset \neq \beta$ pentru orice $\beta \neq \emptyset$, deci nu este adevărat că $(\emptyset \subset \beta) \rightarrow (\emptyset = \beta)$ pentru orice β. Mulțimea totală are proprietatea P, căci dacă $I \subset \beta$, deoarece oricare ar fi β, $\beta \subset I$, avem $I = \beta$, deci

$$(\beta)[(I \subset \beta) \rightarrow (I = \beta)].$$

Ideea

$$(x)(y)\,[(x\ R\ y) \rightarrow (x\ S\ y)]$$

definește pe $R \Rightarrow S$, deci

$$(R \Rightarrow S) \leftrightarrow (x)(y)\ [(x\ R\ y) \rightarrow (x\ S\ y)]. \qquad (6.17°°)$$

La fel

$$(R \Leftrightarrow S) \leftrightarrow (x)\ (y)\ [(x\ R\ y) \leftrightarrow (x\ S\ y)]. \qquad (6.18°°)$$

Mulțimea totală I este definită prin

$$(x)(x \in \mathrm{I}). \qquad (6.19°)$$

O dată aceste definiții puse, vom face cîteva observații.

Vom defini *propozițiile din teoria mulțimilor* astfel

1.1* $x \in \alpha$ este o propoziție din teoria mulțimilor;

1.2 dacă p este o propoziție din această teorie, $\neg p$ este de asemenea o propoziție din această teorie;

1.3 dacă p,q sînt propoziții din această teorie, $p \,\&\, q$, $p \vee q$, $p \to q$ și $p \leftrightarrow q$ sînt propoziții din această teorie;

1.4 dacă p este o propoziție din această teorie, atunci și $(x)p$, $(y)p$... sînt propoziții din această teorie.

Propozițiile din teoria relațiilor binare vor fi definite prin 1.1 ** și 1.2 — 1.4, unde 1.1 ** este

1.1** $x \,R\, y$ este o propoziție din teoria relațiilor binare. Evident, putem avea *propoziții din teoria mulțimilor și a relațiilor binare*; această nouă teorie are propozițiile definite de 1.1*, 1.1**, 1.2 — 1.4.

În aceste teorii avem următoarele tipuri noi de demonstrație. Citățm în primul rînd:

Demonstrația prin generalizare. Dacă o proprietate $P(x)$ este adevărată pentru o valoare x nedeterminată a variabilei, atunci este valabilă $(x)\,P(x)$.

Vom scrie

$$\frac{P(x)}{(x)\,P(x)}.$$

Exemple. Am dovedit pe 6.4 *; facem raționamentul

$$\frac{(x \in \alpha) \to (x \in \alpha)}{(x)[(x \in \alpha) \to (x \in \alpha)]} \qquad \begin{matrix}(6.4^*)\\(6.20°)\end{matrix}$$

Am dovedit pe 6.5°; avem

$$\frac{[x \in (\alpha \cap \beta)] \to (x \in \alpha)}{(x)\{[x \in (\alpha \cap \beta)] \to (x \in \alpha)\}}. \qquad \begin{matrix}(6.5°)\\(6.21°)\end{matrix}$$

Analog

$$(x)\{[x \in (\alpha \cap \beta)] \to (x \in \beta)], \qquad (6.22°)$$

$$(x)\{(x \in \alpha) \to [x \in (\alpha \cup \beta)]\}, \qquad (6.23°)$$

$$(x)\{(x \in \beta) \to [x \in (\alpha \cup \beta)]\}. \qquad (6.24°)$$

Am dovedit pe 6.9*; facem raționamentul de mai sus, pentru a obține

$$(x)\{[x\in(\alpha\cap(\beta\cup\gamma))]\rightarrow[x\in((\alpha\cap\beta)\cup(\alpha\cap\gamma))]\}; \quad (6.25°)$$

$$(x)\{[x\in(\alpha\cup(\beta\cap\gamma))]\rightarrow[x\in((\alpha\cup\beta)\cap(\alpha\cup\gamma))]\}; \quad (6.26°)$$

$$(x)\{[x\in((\alpha\cap\bar{\alpha})\cup\beta)]\rightarrow(x\in\beta)\}; \quad (6.27°)$$

$$(x)\{(x\in\alpha)\rightarrow[x\in(\alpha\cap(\beta\cup\beta))]\}. \quad (6.28°)$$

Afirmații ca cele din (6.20°) — (6.28°) le utilizăm în felul următor

Am definit pe $\alpha\subset\beta$ prin 6.17°. De pildă:

$$(\alpha\subset\alpha)\leftrightarrow(x)[(x\in\alpha)\rightarrow(x\in\alpha)], \quad (a)$$

$$\frac{(x)[(x\in\alpha)\rightarrow(x\in\alpha)]}{\alpha\subset\alpha}; \quad (b)$$

(c)

(a) este un caz particular al lui 6.17°, (b) este (6.20°), (a), (b), (c) este silogismul ipotetic cu echivalențe, deci (c) este totdeauna adevărată. Am dovedit astfel pe 1.1, adică axioma I.1 a algebrelor booleene.

Tot astfel 6.21°, 6.22°, 6.23°, 6.24°, 6.25°, 6.26°, 6.27°, 6.28° sînt axiomele II.1, II.2, II.4, II.5, III.1, III.2, IV.1, IV.2.

Pentru a dovedi pe I.2, I.3, II.3, II.6 avem nevoie de cîteva teoreme noi.

Propoziția

$$[(p\rightarrow q)\ \&\ (q\rightarrow r)]\rightarrow(p\rightarrow r) \quad (6.29)$$

este totdeauna adevărată.

Aceasta este o altă formă a principiului raționamentului silogistic din $p\rightarrow q$ și $q\rightarrow r$ deducem $p\rightarrow r$.

Luînd convenabil pe p, q, r, avem

$$\{[(x\in\alpha)\rightarrow(x\in\beta)]\ \&\ [(x\in\beta)\rightarrow(x\in\gamma)]\}\rightarrow[(x\in\alpha)\rightarrow(x\in\gamma)]. \quad (6.29*)$$

Prin generalizare

$$(x)(\{[(x\in\alpha)\rightarrow(x\in\beta)]\ \&\ [(x\in\beta)\rightarrow(x\in\gamma)]\}\rightarrow[(x\in\alpha)\rightarrow(x\in\gamma)]. \quad (6.29°)$$

Notăm cu $A(x),...,P(x),...$ expresii care conţin variabile x, ca cele utilizate pînă acum

$$x \in \alpha,$$

$$x \notin \alpha,$$

$$\neg (x \in \alpha),$$

$$(x \in \alpha) \rightarrow (x \in \beta),$$

$$[(x \in \alpha) \ \& \ (x \in \beta)] \rightarrow (x \in \gamma)$$

şi aşa mai departe.

Vom enunţa principiul:

Propoziţia

$$\{(x)[P(x) \rightarrow Q(x)]\} \rightarrow \{[(x)P(x)] \rightarrow [(x)Q(x)]\} \qquad (6.30)$$

este totdeauna adevărată.

Într-adevăr, dacă $(x)[P(x) \rightarrow Q(x)]$ şi $(x)P(x)$, atunci pentru un individ a avem:

$$P(a) \rightarrow Q(a)$$

$$P(a),$$

deci prin modus ponens

$$Q(a),$$

şi această concluzie este valabilă pentru orice a, deci $(x)[Q(x)]$.

Propoziţia

$$\{(x)[P(x) \ \& Q(x)]\} \leftrightarrow \{[(x)P(x)] \ \& [(x)Q(x)]\} \qquad (6.31)$$

este întotdeauna adevărată.

Dacă $P(x) \ \& Q(x)$ este valabilă pentru fiecare x, atunci $P(x)$ este valabilă pentru fiecare x, deci $(x)P(x)$; de asemenea $Q(x)$ este valabilă pentru fiecare x, deci $(x)Q(x)$, deci

$$\{(x)[P(x) \ \& \ Q(x)]\} \rightarrow \{[(x)P(x)] \ \& \ [(x)Q(x)]\}.$$

Dar dacă $(x)\ P(x)$, atunci pentru fiecare x avem $P(x)$; la fel din $(x)\ Q\ (x)$ deducem că pentru fiecare x avem $Q(x)$.

Deci pentru fiecare x avem $P(x)$ & $Q(x)$ deci, $(x)[P(x$ & $Q(x)$, deci

$$\{[(x)P(x)] \,\&\, [(x)Q(x)]\} \to \{(x)[P(x) \,\&\, Q(x)]\}.$$

Din cele două implicații deducem echivalența (6.31).

Propoziția

$$\{(x)[P(x) \leftrightarrow Q(x)]\} \leftrightarrow \{[(x)P(x)] \leftrightarrow [(x)Q(x)]\} \qquad (6.32)$$

este întotdeauna adevărată.

Într-adevăr, dacă pentru orice x, $P(x) \to Q(x)$ și dacă pentru orice x, $P(x)$, atunci pentru orice x, $Q(x)$, deci

$[(x)P(x)] \to [(x)Q(x)]$ și analog $[(x)Q(x)] \to [(x)P(x)]$, deci

$$[(x)P(x) \leftrightarrow [(x)Q(x)].$$

Din (6.30) deducem

$$[[(x)(\{[(x\in\alpha) \to (x\in\beta)] \,\&\, [(x\in\beta) \to (x\in\gamma)]\} \to [(x \in \alpha) \to (x \in \gamma)]) \to [(x)\{[(x\in\alpha) \to (x \in \beta)] \,\&\, [(x\in\beta) \to (x \in \gamma)]\} \to \{(x)[(x\in\alpha) \to (x \in \gamma)]\}], \qquad (6.30^c)$$

ceea ce, împreună cu (6.29°) și modus ponens, dă

$$((x)\{[(x\in\alpha) \to (x\in\beta)] \,\&\, [(x\in\beta) \to (x\in\gamma)]\}) \to \{(x)[(x\in\alpha) \to (x\in\gamma)]\}. \qquad (a)$$

Dar (6.31) dă

$$((x)\{[(x\in\alpha) \to (x\in\beta)] \,\&\, [(x\in\beta) \to (x\in\gamma)]\}) \leftrightarrow (\{(x)[(x\in\alpha) \to (x\in\beta)]\} \,\&\, \{(x)[(x\in\beta) \to (x\in\gamma)]\}). \qquad (6.31^c)$$

Vom stabili o lemă:

Propozițiile

$$(p \leftrightarrow q) \to [(p \to r) \to (q \to r)], \qquad (6.33)$$

$$(p \leftrightarrow q) \to [(s \to p) \to (s \to q)] \qquad (6.34)$$

sînt întotdeauna adevărate.

Într-adevăr, dacă p echivalează cu q, atunci a spune că r se deduce din p sau că r se deduce din q, înseamnă același lucru ; de asemenea, că din s se deduce p sau că din s se deduce q.

Din 6.33 cu 6.31° și (a) deducem prin silogism

$$(\{(x)[(x\in\alpha)\to(x\in\beta)]\}\ \&\ \{(x)[(x\in\beta)\to(x\in\gamma)]\})$$
$$\to\{(x)[(x\in\alpha)\to(x\in\gamma)]\}. \qquad (b)$$

Să încercăm să demonstrăm tranzitivitatea incluziunii :

$$[(\alpha\subset\beta)\ \&\ (\beta\subset\gamma)]\to(\alpha\subset\gamma)$$

6.17° dă

$$(\alpha\subset\beta)\leftrightarrow\{(x)[(x\in\alpha)\to(x\in\beta)]\}, \qquad (c)$$
$$(\beta\subset\gamma)\leftrightarrow\{(x)[(x\in\beta)\to(x\in\gamma)]\}. \qquad (d)$$

Vom stabili următoarea lemă

Propozițiile

$$[(p\leftrightarrow q)\&(s\leftrightarrow t)]\to[(p\ \&\ s)\leftrightarrow(q\ \&\ t)], \qquad (6.35)$$
$$[(p\leftrightarrow q)\&(s\leftrightarrow t)]\to[(p\vee s)\leftrightarrow(q\vee t)], \qquad (6.36)$$
$$[(p\leftrightarrow q)\&(s\leftrightarrow t)]\to[(p\to s)\leftrightarrow(q\to t)] \qquad (6.37)$$

sînt întotdeauna adevărate. Aceste propoziții extind pe 6.11—6.14 și 6.33, 6.34: dacă $p\leftrightarrow q$ și $s\leftrightarrow t$, putem oricînd înlocui pe p cu q și pe s cu t, atît în p & s cît și în $p\vee s$ sau $p\to s$.

Cu principiul adjuncțiunii (c) (d) dau propoziția totdeauna adevărată (e)

$$(((\alpha\subset\beta)\leftrightarrow\{(x)[(x\in\alpha)\leftrightarrow(x\in\beta)]\})\ \&\ ((\beta\subset\gamma)\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow\{(x)[(x\in\alpha)\to(x\in\beta)]\}). \qquad (e)$$

Din (6.35) deducem

$$[((\alpha\subset\beta)\leftrightarrow\{(x)[(x\in\alpha)\to(x\subset\beta)]\})\ \&\ ((\beta\subset\gamma)\leftrightarrow$$
$$\{(x)[(x\in\beta)\to(x\in\gamma)]\})]\to$$
$$([(\alpha\subset\beta)\ \&\ (\beta\subset\gamma)]\leftrightarrow[\{(x)[(x\subset\alpha)\to(x\in\beta)]\}\ \&$$
$$\{(x)[(x\in\alpha)\to(x\in\gamma)]\}]). \qquad (f)$$

Dar (f) și (e) cu modus ponens dau

$$[(\alpha \subset \beta)\ \&(\beta \subset \gamma)] \leftrightarrow (\{(x)[(x \in \alpha) \rightarrow (x \in \beta)]\}\ \& \{(x)[(x \in \beta) \rightarrow (x \in \gamma)]\}). \qquad (g)$$

Dar (g) este $p \leftrightarrow q$, iar (f) este $q \leftrightarrow r$, în timp ce din 6.33, 6.34 deducem

$$(p \leftrightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow r)], \qquad (6.38)$$

$$(p \leftrightarrow q) \rightarrow [(s \rightarrow q) \leftrightarrow (s \rightarrow p)], \qquad (6.39)$$

deci aplicînd de două ori modus ponens, ajungem la $p \rightarrow r$, adică

$$[(\alpha \subset \beta)\ \&\ (\beta \subset \gamma)] \rightarrow \{(x)[(x \in \alpha) \rightarrow (x \subset \gamma)]\}. \qquad (h)$$

Cu 6.17° sub forma

$$(x)[(x \in \alpha) \rightarrow (x \in \gamma)] \leftrightarrow (\alpha \subset \gamma),$$

prin silogismul ipotetic obținem

$$[(\alpha \subset \beta)\ \&\ (\beta \subset \gamma)] \rightarrow (\alpha \subset \gamma),$$

care este I.2.

Să încercăm să dovedim pe I.3

$$[(\alpha \subset \beta)\ \&\ (\beta \subset \alpha)] \rightarrow (\alpha = \beta).$$

Vom utiliza pe (g) de mai sus sub forma:

$$[(\alpha \subset \beta)\ \&\ (\beta \subset \alpha)] \leftrightarrow (\{(x)[(x \in \alpha) \rightarrow (x \in \beta)]\} \ \&\ \{(x)[(x \in \beta) \rightarrow (x \in \alpha)]\}) \qquad (i)$$

și lema:

Propozițiile

$$[(p \rightarrow q)\ \&\ (q \rightarrow p)] \rightarrow (p \leftrightarrow q), \qquad (6.40)$$

$$(p \leftrightarrow q) \rightarrow [(p \rightarrow q)\ \&\ (q \rightarrow p), \qquad (6.41)$$

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \rightarrow q)\ \&\ (q \rightarrow p) \qquad (6.42)$$

sînt întotdeauna adevărate.

Într-adevăr, $p \leftrightarrow q$ înseamnă că din p deducem pe q și din q pe p, $(p \rightarrow q)\ \&\ (q \rightarrow p)$.

Din (6.40), alegînd convenabil pe p și q, avem

$$\{[(x \in \alpha) \to (x \in \beta)] \,\&\, [(x \in \beta) \to (x \in \alpha)]\} \to$$
$$\to [(x \in \alpha) \leftrightarrow (x \in \beta)]. \qquad (6.40\ ^*)$$

Deducem pe

$$(\{(x)[(x \in \alpha) \to (x \in \beta)]\} \,\&\, \{(x)[(x \in \beta) \to (x \in \alpha)]\})$$
$$\to \{(x)[(x \in \alpha) \leftrightarrow (x \in \beta)]\}. \qquad (j)$$

Demonstrația detaliată ca exercițiu; cu 6.18°:

$$(\alpha = \beta) \leftrightarrow \{(x)[(x \in \alpha) \leftrightarrow (x \in \beta)]\},$$

avem

$$[(\alpha \subset \beta) \,\&\, (\beta \subset \alpha)] \to (\alpha = \beta).$$

Lăsăm ca exercițiu demonstrarea lui

$$(\alpha = \beta) \to [(\alpha \subset \beta) \,\&\, (\beta \subset \alpha)].$$

Să încercăm să dovedim pe II.3 : $[(\gamma \subset \alpha) \,\&\, (\gamma \subset \beta)] \to$
$\to [\gamma \subset (\alpha \cap \beta)]$.

Avem

$$(\gamma \subset \alpha) \leftrightarrow \{(x)[(x \in \gamma) \to (x \in \alpha)]\}, \qquad (a)$$
$$(\gamma \subset \beta) \leftrightarrow \{(x)[(x \in \gamma) \to (x \in \beta)]\}, \qquad (b)$$
$$[\gamma \subset (\alpha \cap \beta)] \leftrightarrow \{(x)[(x \in \gamma) \to (x \in (\alpha \cap \beta))]\}. \qquad (c)$$

Trebuie din (a) și (b) să deducem pe (c).

Dar 6.1* este

$$[x \in (\alpha \cap \beta)] \leftrightarrow [(x \in \alpha) \,\&\, (x \in \beta)], \qquad (d)$$

deci

$$\{(x \in \gamma) \to [x \in (\alpha \cap \beta)]\} \leftrightarrow \{(x \in \gamma) \to$$
$$\to [(x \in \alpha) \,\&\, (x \in \beta)]\} \qquad (e)$$

provine prin modus ponens din (d) şi

$$\{[x \in (\alpha \cap \beta)] \leftrightarrow [(x \in \alpha) \,\&\, (x \in \beta)]\} \rightarrow (\{(x \in \gamma) \rightarrow$$
$$\rightarrow [x \in (\alpha \cap \beta)]\} \leftrightarrow \{(x \in \gamma) \rightarrow [(x \in \alpha) \,\&\, (x \in \beta)]\}), \quad \text{(f)}$$

iar (f) provine din (6.34).

Din (e) se deduce (demonstraţia ca exerciţiu):

$$(x)\{(x \in \gamma) \rightarrow [x \in (\alpha \cap \beta)]\} \leftrightarrow ((x)\{(x \in \gamma) \rightarrow$$
$$\rightarrow [(x \in \alpha) \,\&\, (x \in \beta)]\}), \quad \text{(g)}$$

deci (c) provine din

$$[\gamma \subset (\alpha \cap \beta)] \leftrightarrow \{(x)[(x \in \gamma) \rightarrow [(x \in \alpha) \,\&\, (x \in \beta)]\}. \quad \text{(h)}$$

Să deducem pe (h) din (a) şi (b). O lemă:

Propoziţiile

$$[(p \rightarrow q) \,\&\, (p \rightarrow r)] \rightarrow [p \rightarrow (q \,\&\, r)], \quad (6.43)$$
$$[(p \rightarrow r) \,\&\, (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \vee q) \rightarrow r] \quad (6.44)$$

sînt întotdeauna adevărate.

Într-adevăr, dacă $p \rightarrow r$ şi $q \rightarrow r$, atunci din p deducem şi pe q, şi pe r, deci (6.43).

Dacă $p \rightarrow r$ şi $q \rightarrow r$, fiecare termen al dilemei $p \vee q$ are drept consecinţă pe r, deci 6.44.

Din această lemă deducem că

$$\{[(x \in \gamma) \rightarrow (x \in \alpha)] \,\&\, [(x \in \gamma) \rightarrow (x \in \beta)]\} \rightarrow$$
$$\rightarrow \{(x \in \gamma) \rightarrow [(x \in \alpha) \,\&\, (x \in \beta)]\}$$

este întotdeauna adevărată, deci, cu principiul generalizării, cu 6.30 şi 6.31

$$(\{(x)[(x \in \gamma) \rightarrow (x \in \alpha)]\} \,\&\, \{(x)[x \in \gamma) \rightarrow (x \in \beta)]\}) \rightarrow$$
$$\rightarrow ((x)\{(x \in \gamma) \rightarrow [(x \in \alpha) \,\&\, (x \in \beta)]\}). \quad \text{(k)}$$

Deducerea lui (h) din (k) o lăsăm pe seama cititorului. La fel se deduce că

$$[(\alpha \subset \gamma) \,\&\, (\beta \subset \gamma)] \rightarrow [(\alpha \cup \beta) \subset \gamma].$$

Vom demonstra propoziţia:

dacă $\alpha \subset \beta$, atunci $\bar{\beta} \supset \bar{\alpha}$.

Această propoziție se scrie

$$[(x \in \alpha) \to (x \in \beta)] \to [(x \in \ ) \to (x \in \bar{\alpha})]. \qquad (a)$$

Dar

$$(x \in \bar{\beta}) \to (x \in \alpha) \qquad (b)$$

se scrie

$$(x \notin \beta) \to (x \notin \alpha) \qquad (c)$$

sau

$$\neg(x \in \beta) \to \neg(x \in \alpha). \qquad (d)$$

Vom utiliza lema:

Propoziția

$$(p \to q) \to (\neg q \to \neg p) \qquad (6.45)$$

este întotdeauna adevărată.

Într-adevăr, dacă din p deducem pe q, dar q nu este adevărată, atunci p nu poate fi adevărată, căci dacă ar fi, q ar fi adevărată, și q nu este adevărată.

Din (6.45) deducem:

$$[(x \in \alpha) \to (x \in \beta)] [\to [\neg(x \in \beta) \to \neg(x \in \alpha)]. \qquad (e)$$

Din

$$(x \in \dot{\alpha}) \leftrightarrow \neg(x \in \alpha),$$
$$(\dot{x} \in \beta) \leftrightarrow \neg(x \in \beta)$$

i (e) se deduce

$$(\alpha \sqsubset \beta) \to (\bar{\beta} \sqsubset \alpha)$$

printr-un raționament pe care-l lăsăm pe seama cititorului.

Propoziția

$$\alpha = \alpha$$

provine din lema următoare, care e *principiul dublei negații:*

Propoziția

$$p \leftrightarrow \neg\neg p \qquad (6.46)$$

este întotdeauna adevărată.

Propoziția

$$p \vee \neg p \tag{6.47}$$

este întotdeauna adevărată.

Acesta este celebrul principiu al excluderii terțiului: o propoziție este adevărată sau măcar negația ei este adevărată.

Propoziția

$$p \,\&\, \neg p$$

este întotdeauna falsă, ceea ce se enunță: *propoziția*

$$\neg(p \,\&\, \neg p) \tag{6.48}$$

este întotdeauna adevărată.

Acesta este celebrul principiu al contradicției (mai corect numit în ultima vreme: principiul necontradicției).

Propozițiile

$$[(p \to q) \,\&\, (p \to \neg q)] \to (\neg p), \tag{6.49}$$

$$[(p \to q) \,\&\, (\neg p \to q)] \to q \tag{6.50}$$

sînt întotdeauna adevărate.

Acestea reprezintă o altă formă a principiului contradicției, respectiv a terțiului exclus; într-adevăr, (6.49) spune că dacă dintr-o ipoteză p deducem o absurditate, și pe q și pe $\neg q$, atunci p este falsă. Principiul (6.50) ne spune că dacă o concluzie q poate fi trasă din amîndoi termenii dilemei p, $\neg p$, atunci ea este adevărată.

Propoziția (6.47) dă

$$(x)[(x \in \alpha) \vee (x \in \bar{\alpha})]$$

— demonstrația ca exercițiu —, deci pe: $\alpha \cup \bar{\alpha} = I$, iar propoziția (6.48) dă

$$\neg[(x \in \alpha) \,\&\, (x \in \bar{\alpha})],$$

deci $\alpha \cap \bar{\alpha} = \emptyset$, care este $\neg[x \in (\alpha \cap \bar{\alpha})]$.

Propozițiile (6.49) și (6.50) dau

$$\{[(x\in\alpha)\to(x\in\beta)]\ \&\ [(x\in\alpha)\to(x\in\bar{\beta})]\}\to[\neg(x\in\alpha)]$$

$$\{[(x\in\alpha)\to(x\in\beta)]\ \&\ [\neg(x\in\bar{\alpha})\to(x\in\beta)]\}\to(x\in\beta),$$

ceea ce dă $[(\alpha\subset\beta)\ \&\ (\alpha\subset\bar{\beta})]\to(\alpha=\emptyset)$ și $[(\alpha\subset\beta)\ \&\ (\bar{\alpha}\subset\beta)]\to(\beta=\mathrm{I})$.

CUANTORUL EXISTENȚIAL

Am introdus ideea de mulțimi disjuncte

$$\alpha\cap\beta=\emptyset$$

și mulțimi nedisjuncte

$$\sigma\cap\tau\neq\emptyset.$$

Aceste idei se deduc din intersecție și din ideile

$$\lambda=\emptyset,$$

$$\mu\neq\emptyset.$$

Propoziția

$$x\in\emptyset$$

este întotdeauna falsă; propoziția

$$\neg(x\in\emptyset)$$

este întotdeauna adevărată, deci propoziția

$$(x)[\neg(x\in\emptyset)]$$

este adevărată.

Dacă însă $\mu\neq\emptyset$, propoziția

$$x\in\mu$$

poate fi adevărată pentru unii x ceea ce se spune: există un x astfel ca $x\in\mu$.

Această propoziție o vom scrie

$$(\exists x)(x\in\mu),$$

introducînd *cuantorul existențial* (Ex). Deci

$$\neg(Ex)(x \in \emptyset) \tag{6.51°}$$

Propozițiile

$$[\neg(x)p] \leftrightarrow [(Ex)(\neg p)], \tag{6.52}$$

$$[\neg(Ex)p] \leftrightarrow [(x)(\neg p)], \tag{6.53}$$

$$[(Ex)p] \leftrightarrow [\neg(x)(\neg p)], \tag{6.54}$$

$$[(x)p] \leftrightarrow [\neg(Ex)(\neg p)] \tag{6.55}$$

sînt totdeauna adevărate

Într-adevăr, cînd neg că p este adevărată pentru orice x, nu fac decît să afirm existența unui x care să-l infirme pe p, deci (6.52); dacă neg această existență a unui x care să infirme pe p, înseamnă că p nu este infirmată prin nici un contraexemplu, deci că p este adevărată pentru orice x, deci (6.55). La fel, dacă neg existența unui x care să confirme pe p, acesta înseamnă că orice x infirmă pe p, deci (6.53), în timp ce dacă neg că orice x infirmă pe p, înseamnă că există un x care-l confirmă, deci (6.54).

Propozițiile

$$(x)p \vee (Ex)(\neg p), \tag{6.56}$$

$$(Ex)p \vee (x)(\neg p) \tag{6.57}$$

sînt totdeauna adevărate; *propozițiile*

$$(x)p \,\&\, (Ex)(\neg p), \tag{6.58}$$

$$(Ex)p \,\&\, (x)(\neg p) \tag{6.59}$$

sînt totdeauna false; *propozițiile*

$$\neg[(x)p \,\&\, (Ex)(\neg p)], \tag{6.60}$$

$$\neg[(Ex)p \,\&\, (x)(\neg p)] \tag{6.61}$$

sînt totdeauna adevărate.

Justificarea este lăsată pe seama cititorului.

VII

Analiza judecăților din capitolele precedente

ALFABETUL UTILIZAT

În capitolul VI am demonstrat că axiomele algebrelor booleene din capitolul V sînt valabile pentru mulțimi. Această demonstrație s-a făcut pornind de la definițiile 6.1 *, 6.2 *, 6.3 *, 6.17°, 6.18°, 6.19°, 6.51° cu ajutorul propozițiilor 6.4 — 6.16, 6.29, 6.35 — 6.50, care sînt întotdeauna adevărate.

În propozițiile din capitolul VI intră:

α) Literele p, q, r, s, t care sînt variabile propoziționale, adică semne ce pot fi înlocuite cu propoziții. Astfel, înlocuind aceste litere cu propoziții ale teoriei mulțimilor $x \in \alpha$, $x \notin \alpha$,..., am obținut propozițiile întotdeauna adevărate ale teoriei mulțimilor 6.4 *,... Tot așa, înlocuindu-le cu propozițiile teoriei relațiilor binare $x\,R\,y$,.., am obținut propozițiile întotdeauna adevărate ale teoriei relațiilor binare 6.4 **,... Bineînțeles, propozițiile 6.4—6.16,... sînt întotdeauna adevărate; ele pot fi înlocuite cu orice propoziție. De pildă, (6.5) dă

$$(2 < 3) \Rightarrow (2 \leqslant 3),$$

dacă propozițiile p și q sînt $2 \leqslant 3$, $2 \neq 3$, iar $p \,\&\, q$, care este $(2 \leqslant 3) \,\&\, (2 \neq 3)$ este $2 < 3$. Tot (6.5) dă:

„dacă fumez și scriu, atunci fumez".

β) Semnele „$\neg$", „$\rightarrow$", „$\leftrightarrow$", „$\vee$", „&". Aceste semne leagă una sau două propoziții, formînd o nouă propoziție: $\neg p$, $p \rightarrow q$, $p \leftrightarrow q$, $p \vee q$, $p \,\&\, q$. Procedeul se iterează, formînd pe $\neg\neg p$, $\neg\neg\neg p$, $\neg\neg\neg\neg p$,..., $\neg(p \rightarrow q)$, $(\neg p) \rightarrow q$, $p \rightarrow (\neg q)$, $(\neg p) \rightarrow (\neg q)$, $\neg[(\neg p) \rightarrow q]$ ș.a.m.d.

γ) Literele $x,y,...$, care țin locul indivizilor; ideea de individ nu este precizată în cap. VI; ea apare distingînd indivizii $x,...$ de proprietățile lor $P, Q,...$; scrierea $P(x),...$ corespunde ideii: individul x are proprietatea P.

δ) semnele (x), (Ex) sînt numite cuantori. Dacă p este o propoziție $(x)p$ și $(Ex)p$ sînt de asemenea propoziții.

ε) Semnele „$\in$“, „$\notin$“, „$\subset$“, „$\cup$“, „$\cap$“, „$-$“. „$\emptyset$“, „I“ care sînt specifice teoriei mulțimilor. În teoria mulțimilor, dezvoltată în cap. I, apar:

— indivizi, notați $a,...,\ x,...$;

— mulțimi, notate α, β,

— printre mulțimi au apărut două mulțimi constante $\emptyset$ și I;

— relații între indivizi și mulțimi: $a \in \alpha$, $b \notin \alpha$; o astfel de relație a fost în acel capitol considerată ca o proprietate a indivizilor;

— relații între mulțimi: $\alpha = \beta$, $\gamma \subset \delta$, α și β sînt disjuncte;

— semne care leagă una sau două mulțimi, formînd o nouă mulțime: $\bar{\alpha}$, $\alpha \cap \beta$, $\alpha \cup \beta$, $\alpha - \beta$ etc. Le vom numi legi de compoziție între mulțimi;

— proprietăți ale relațiilor între mulțimi: reflexivitatea (incluziunii, egalității), simetria (egalității) ș.a.

— proprietăți ale legilor de compoziție: comutativitatea (reuniunii, intersecției), etc.

ζ) În teoria relațiilor binare din cap. II apar literele ce țin locul indivizilor $a, ...x,...$ și cele ce țin locul relațiilor $R, S, T,...$, și scrierea $x\,R\,y$.

η) În teoria relațiilor binare din cap. II apar pe lîngă semnele de la punctul ζ de mai sus și

relații între relații $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, (6.17°°, 6.18°°);

semne care leagă relațiile pentru a forma noi relații „&“, „$\vee$“, „$-$“ (negație), “ (produsul), „$\sim$“ (transpusa);

proprietăți ale relațiilor între relații: reflexivitatea lui „$\Rightarrow$“ și „$\Leftrightarrow$“, tranzitivitatea lor, etc;

proprietăți ale lui „&“, „$\vee$“, „$\Rightarrow$“,...

În studiul făcut asupra mulțimilor în cap. I au intrat ideile din α, ε, dar, cum s-a văzut în cap. VI, și ideile din β, γ, δ. În cel al relațiilor binare au intrat ideile din α, ζ, η, dar, cum s-a văzut în cap. VI, și ideile din β, γ, δ.

Studiul ideilor din α, β, γ, δ formează *logica predicatelor*, disciplină comună teoriei mulțimilor și teoriei relațiilor.

Dar o parte din această logică, cea care nu conține decît ideile din β, dă loc la propozițiile 6.4—6.16, 6.29, 6.35 — 6.50; acest capitol este numit *logica propozițiilor.*

Din contra, proprietăți de tipul lui 6.17°—6.30, 6.31—6.32, 6.52—6.57 conțin cuantori; ele sînt specifice logicii predicatelor; propoziții ca 6.4 *, 6.5 * — 6.8 *,... și toate celelalte notate cu un asterisc, 6.4 **, 6.5 ** — 6.8 ** ,. ., și toate cele notate cu două asteriscuri sînt și ele proprietăți ale logicii predicatelor, dar, neavînd cuantori, fac parte din *logica predicatelor cu variabile libere.*

Să comparăm judecățile din cap. V.

În acest capitol ne-am ocupat de o mulțime B în care se dau:

— relația de egalitate;

— o relație binară „$\subset$“;

— două legi de compoziție binare, „$\cap$“ și „$\cup$“ și, una monară „$-$“;

— tot obiceiul de a face matematică.

Deosebirea din cap. I și cap. V este netă: în cap. I s-au justificat intuitiv anume definiții și anume proprietăți; în cap. V s-au ales anume proprietăți ca axiome și din ele s-au demonstrat altele ca teoreme, demonstrațiile s-au făcut după obiceiul matematicienilor.

Despre acest obicei vom vorbi în acest capitol.

Vom pleca de la definiția *expresiilor* pe care o dăm astfel:

7.1. Literele p, q... sînt expresii.

7.2. Dacă $\mathfrak{A}$ este o expresie, $\neg\mathfrak{A}$ este o expresie.

7.3. Dacă $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ sînt expresii $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\ \&\ \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ sînt expresii.

Punerea parantezelor se face după obiceiul matematicienilor.

În acest capitol nu vom utiliza alte idei, dar pentru a arăta că tratarea riguroasă corespunde unei necesități vom da și exemple explicative.

Dacă în locul literelor $p,q,...$ punem anume propoziții determinate, adică fără variabile, fie ale teoriei mulțimilor, fie ale teoriei relațiilor, fie ale limbii obținute (acele propoziții vor fi adevărate sau false), obținem o altă propoziție, (care la rîndul ei va fi adevărată sau falsă).

De exemplu, în expresiile

$$(p\ \&\ q) \vee (\neg q),$$
$$(p \vee q)\ \&\ (\neg q)$$

să punem $2 < 3$, $3 < 1$ în loc de p, q; $2 < 3$ este adevărată, $3 < 1$ este falsă; propozițiile obținute

$$[(2 < 3)\ \&\ (3 < 1)] \vee (\neg(3 < 1))$$
$$[(2 < 3) \vee (3 < 1)]\ \&\ (\neg(2 < 3))$$

sînt: prima adevărată, (căci $\neg(3 < 1)$ este adevărată deci „t sau $\neg(3 < 1)$" este adevărată, oricare ar fi propoziția t; deci în special prima propoziție este adevărată), iar $(2 < 3) \vee (3 < 1)$ este adevărată, căci $2 < 3$ este adevărată; $\neg(2 < 3)$ este falsă, căci $2 < 3$ este adevărată, deci conjuncția $[(2 < 3) \vee (3 < 1)]\ \&\ (\neg(2 < 3))$ unei propoziții adevărate $(2 < 3) \vee (3 < 1)$ și a uneia false $\neg(2 < 3)$ este falsă.

Adevărul și falsul sînt cele două *valori logice* pe care le poate avea o propoziție *.

Valoarea logică a propoziției $\neg p$ este dată în funcție de valoarea logică a lui p prin tabloul

p	falsă	adevărată
$\neg p$	adevărată	falsă

(1)

Într-adevăr, negația unei propoziții adevărate este falsă, cea a unei propoziții false este adevărată.

Valoarea logică a propoziției $p \,\&\, q$ este dată. prin tabloul următor, în funcție de valoarea logică a lui p și a lui q:

	&	falsă	adevărată
p	falsă	falsă	falsă
	adevărată	falsă	adevărată

(2)

căci „p și q" este falsă, dacă măcar una din propozițiile p, q este falsă, și nu este adevărată decît dacă și p și q sînt adevărate.

Valoarea logică a propoziției $p \vee q$ este dată prin tabloul următor, în funcție de valoarea logică a lui p și a lui q:

	$\vee$	falsă	adevărată
p	falsă	falsă	adevărată
	adevărată	adevărată	adevărată

(3)

căci „p sau măcar q" nu este falsă decît dacă și p și q sînt false; dacă măcar una este adevărată, „p sau măcar q" este adevărată.

Care este valoarea logică a lui $p \to q$, deci a lui:

dacă p atunci q?

Această expresie înseamnă

nu p sau măcar q,

---

* Adeseori, valoarea logică „adevărat" e notată cu „1" iar, valoarea logică „fals" e notată „0". În ALGOL se întrebuințează notația „true" și „false"

căci dacă $p \to q$, atunci sau p este adevărată și deci și q este adevărată sau p nu este adevărată, deci $\neg p$ este adevărată.

Vom admite identitatea lui

$$p \to q$$

și a lui

$$(\neg p) \vee q,$$

deci valoarea logică a lui $p \to q$ este dată de tabloul următor, în funcție de valorile logice ale lui p și q:

	$\to$	q: falsă	q: adevărată
p: falsă		adevărată	adevărată
p: adevărată		falsă	adevărată

(4)

Cu alte cuvinte, $p \to q$ este falsă, dacă p este adevărată și q falsă, și numai în acest caz.

Valoarea logică a lui $p \leftrightarrow q$ este cea a lui $(p \to q)\,\&\,(q \to p)$, deci este dată, ținînd seama de tabelele (2) și (3), prin tabloul

	$\leftrightarrow$	q: falsă	q: adevărată
p: falsă		adevărată	falsă
p: adevărată		falsă	adevărată

Dacă scriem

1 în loc de *adevăr*

0 în loc de *fals*

atunci comparînd tablourile de la p. 152—153 cu cele de la p. 119 tabloul

lui $\neg$ este identic cu cel al lui $^-$

— & — — — — — — — — $\cap$

— $\vee$ — — — — — — — — $\cup$

iar funcțiile $\to$, $\leftrightarrow$ sînt cele definite la pp. 27 și 29, ultima numită $\dot{+}$.

Dacă avem o expresie $\mathfrak{E}$ în care intră diferite litere $p,q,...$ vom putea calcula valoarea ei logică pentru valori logice date lui $p,q,...$.

Exemple

p	$p \to p$	$\neg p$	$p \vee \neg p$
falsă	adevărată	adevărată	adevărată
adevărată	adevărată	falsă	adevărată

$p \,\&\, \neg p$	$\neg(p \,\&\, \neg p)$	$\neg\neg p$	$p \leftrightarrow \neg\neg p$
falsă	adevărată	falsă	adevărată
falsă	adevărată	adevărată	adevărată

p	q	$p \,\&\, q$	$(p \,\&\, q) \to p$
falsă	falsă	falsă	adevărată
falsă	adevărată	falsă	adevărată
adevărată	falsă	falsă	adevărată
adevărată	adevărată	adevărată	adevărată

$(p \,\&\, q) \to q$	$p \vee q$	$p \to (p \vee q)$	$q \to (p \vee q)$	$p \to (q \to p)$
adevărată	falsă	adevărată	adevărată	adevărată
adevărată	adevărată	adevărată	adevărată	adevărată
adevărată	adevărată	adevărată	adevărată	adevărată
adevărată	adevărată	adevărată	adevărată	adevărată

Se vede că unele expresii, cum sînt: $p \to p$, $p \vee (\neg p)$, $\neg(p \,\&\, \neg p)$, $p \leftrightarrow \neg\neg p$, $(p \,\&\, q) \to p$, $(p \,\&\, q) \to q$, $p \to (p \vee q)$, $q \to (p \vee q)$ sînt întotdeauna adevărate, oricum ar fi propozițiile cu care înlocuim pe p, q,...

Vom numi *teze ale logicii propozițiilor* expresiile care sînt întotdeauna adevărate.

Teorema I. *Expresiile 6.4—6.16, 6.29, 6.33—6.50 sînt teze ale logicii propozițiilor.* Demonstrația ca exercițiu.

Să considerăm raționamentele prin modus ponens

$$\frac{\mathfrak{A} \qquad \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}} \tag{I}$$

și

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B}} \qquad \text{(II)}$$
$$\mathfrak{B}$$

Dacă $\mathfrak{A}$ și $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ sînt teze, oricare ar fi propozițiile ce înlocuiesc literele $p,q,...$ ce intră în $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, atît $\mathfrak{A}$ cît și $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ sînt adevărate, deci examinînd tabloul (4), în (I) $\mathfrak{B}$ va fi adevărată și examinînd tabloul (5), în (II) $\mathfrak{B}$ va fi adevărată, deci $\mathfrak{B}$ va fi o teză atît în (I) cît și în (II).

Să considerăm raționamentul prin silogism ipotetic:

$$\frac{\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}}{\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}} \qquad \text{(III)}$$
$$\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$$

și

$$\frac{\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B}}{\mathfrak{B} \leftrightarrow \mathfrak{C}} \qquad \text{(IV)}$$
$$\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{C}$$

În mod analog, dacă $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ și $\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ sînt întotdeauna adevărate, pentru orice valori logice ale propozițiilor ce înlocuiesc pe p, q,... putem avea

$\mathfrak{A}$ falsă,

$\mathfrak{A}$ adevărată și $\mathfrak{B}$ adevărată; în acest caz $\mathfrak{C}$ trebuie să fie și ea adevărată;

deci $\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ este adevărată.

Dacă $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B}$ și $\mathfrak{B} \leftrightarrow \mathfrak{C}$ sînt întotdeauna adevărate, putem avea

$\mathfrak{A}$ falsă și $\mathfrak{B}$ falsă, deci $\mathfrak{C}$ falsă

$\mathfrak{A}$ adevărată și $\mathfrak{B}$ adevărată, deci $\mathfrak{C}$ adevărată;

deci $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{C}$ este întotdeauna adevărată.

Deci șirurile de expresii

$$\frac{\begin{matrix}\mathfrak{P}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathfrak{P}_s\end{matrix}}{\mathfrak{C}}$$

din (I) — (IV) se bucură de proprietatea : dacă $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_r$ sînt teze, adică sînt întotdeauna adevărate, atunci și $\mathfrak{C}$ este teză, adică este întotdeauna adevărată. Un șir de expresii $\mathfrak{P}_1, \ldots \mathfrak{P}_r, \mathfrak{C}$ care se bucură de această proprietate, va fi numit *schemă deductivă valabilă.*

Se vede din tabloul (2) că dacă $\mathfrak{A}$ și $\mathfrak{B}$ sînt întotdeauna adevărate, atunci și $\mathfrak{A}$ & $\mathfrak{B}$ este întotdeauna adevărată, deci schema adjuncției

$$\frac{\mathfrak{A} \quad \mathfrak{B}}{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}} \tag{V}$$

este o schemă valabilă. Am dovedit astfel regula adjuncțiunii.

Să presupunem că avem

$$\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B}.$$

Tabloul lui $\leftrightarrow$ de la p. 153 arată că sau $\mathfrak{A}$ și $\mathfrak{B}$ sînt amîndouă adevărate, deci din tabloul lui $\rightarrow$, $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ și $\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}$ sînt adevărate, sau și $\mathfrak{A}$ și $\mathfrak{B}$ sînt false, deci $\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}$ și $\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}$ sînt adevărate, deci schemele trecerii de la echivalență la implicație

$$\frac{\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B}}{\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}}, \tag{VI}$$

$$\frac{\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B}}{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}} \tag{VII}$$

sînt valabile.

Dacă avem

$$\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B} \quad (*)$$
$$\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A} \quad (**)$$

atunci, dacă $\mathfrak{A}$ e adevărată, atunci $\mathfrak{B}$ e adevărată din prima schemă și dacă $\mathfrak{B}$ e adevărată, atunci și $\mathfrak{A}$ e adevărată. Deci $\mathfrak{A}$ și $\mathfrak{B}$ sînt în același timp adevărate. Deci $\mathfrak{A}$ și $\mathfrak{B}$ sînt în același timp false, ceea ce se arată și altfel, și anume : dacă $\mathfrak{A}$ e falsă $\mathfrak{B}$ nu poate fi adevărată, din cauza lui (**) [căci dacă $\mathfrak{B}$ ar fi adevărată, din (**)

s-ar deduce că și $\mathfrak{A}$ ar fi adevărată], deci $\mathfrak{B}$ e falsă, și dacă $\mathfrak{B}$ e falsă, atunci $\mathfrak{A}$ nu poate fi adevărată din cauza lui (*), căci dacă $\mathfrak{A}$ ar fi adevărată și $\mathfrak{B}$ ar trebui să fie). Deci $\mathfrak{A}$ și $\mathfrak{B}$ sînt în același timp false.

Deci avem tipul de raționament

$$\frac{\mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \qquad \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}}{\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B}} \qquad \text{(VIII)}$$

Teorema II. *Șirurile de expresii (I) — (VIII) sînt scheme deductive valabile.*

Exerciții

$[p \to (q \to r)] \to [(p \to q) \to (p \to r)]$;
$[p \to (q \to r)] \to [(p \,\&\, q) \to r]$;
$[(p \,\&\, q) \to r] \to [p \to (q \to r)]$;
$(p \to q) \to [(p \to r) \to (p \to (q \,\&\, r))]$;
$(p \to r) \to [(q \to r) \to ((p \vee q) \to r)]$

DEFINIȚIA SINTACTICĂ A TEZELOR ÎN LOGICA PROPOZIȚIILOR

Vom considera următoarele expresii ce vor fi numite *axiomele logicii propozițiilor*:

7.4 $p \to (q \to p)$;
7.5 $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$;
7.6 $(p \leftrightarrow q) \to (p \to q)$;
7.7 $(p \leftrightarrow q) \to (q \to p)$;
7.8 $(p \to q) \to ((q \to p) \to (p \leftrightarrow q))$;
7.9 $(p \,\&\, q) \to p$;
7.10 $(p \,\&\, q) \to q$;
7.11 $(p \to q) \to ((p \to r) \to (p \to (q \,\&\, r)))$;
7.12 $p \to (p \vee q)$;
7.13 $q \to (p \vee q)$;

7.14 $(p \to r) \to ((q \to r) \to ((p \vee q) \to r))$;

7.15. $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$;

7.16. $\neg \neg p \leftrightarrow p$.

Vom numi *demonstrație în logica propozițiilor* un șir de expresii

$$\mathfrak{E}_1, \ldots, \mathfrak{E}_n,$$

astfel ca fiecare $\mathfrak{E}_i$ să fie de forma:

α) una din axiomele 7.4 — 7.16;

β) provine dintr-o expresie precedentă $\mathfrak{E}_j$ prin substituție. Spunem că o expresie $\mathfrak{R}$ provine din expresia $\mathfrak{H}$ prin substituția expresiilor $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_r$ în locul literelor $p_1, \ldots, p_r$, dacă în $\mathfrak{H}$ am înlocuit pretutindeni litera p_1 prin expresia $\mathfrak{A}_1, \ldots$, litera p_r prin expresia $\mathfrak{A}_r$; numim această substituție $p_1/\mathfrak{A}_1, \ldots, p_r/\mathfrak{A}_r$;

γ) provine din două expresii precedente $\mathfrak{E}_h$, $\mathfrak{E}_k$ ($h < i$, $k < i$) prin modus ponens, adică $\mathfrak{E}_k$ este expresia $\mathfrak{E}_h \to \mathfrak{E}_i$.

Exemplu de demonstrație I:

$\mathfrak{E}_1$ este expresia $p \to (q \to p)$;

$\mathfrak{E}_2$ este expresia $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$

$\mathfrak{E}_3$ este expresia $(p \to (q \to p)) \to ((p \to q) \to (p \to p))$;

$\mathfrak{E}_4$ este expresia $(p \to q) \to (p \to p)$;

$\mathfrak{E}_5$ este expresia $(p \to (q \to p)) \to (p \to p)$;

$\mathfrak{E}_6$ este expresia $p \to p$.

Se vede că $\mathfrak{E}_1$ și $\mathfrak{E}_2$ sînt axiomele 7.4, 7.5, $\mathfrak{E}_3$ provine din $\mathfrak{E}_2$, substituind pe p lui r. $\mathfrak{E}_4$ provine din $\mathfrak{E}_1$ și $\mathfrak{E}_3$ prin modus ponens. $\mathfrak{E}_5$ provine din $\mathfrak{E}_4$ substituind lui q pe $p \to q$. $\mathfrak{E}_6$ provine din $\mathfrak{E}_1$ și $\mathfrak{E}_5$ prin modus ponens.

Exemplu de demonstrație II:

$\mathfrak{E}_1$ este expresia $(p \to q) \to ((p \to r) \to (p \to (q \,\&\, r)))$;

$\mathfrak{E}_2$ este expresia $(p \,\&\, q) \to p$;

$\mathfrak{E}_3$ este expresia $(p \,\&\, q) \to q$;

$\mathfrak{E}_4$ este expresia $[(p \,\&\, q) \to q] \to \{[(p \,\&\, q) \to p] \to [(p \,\&\, q) \to (q \,\&\, p)]\}$;

$\mathfrak{E}_5$ este expresia $[(p \,\&\, q) \to p] \to [(p \,\&\, q) \to (q \,\&\, p)]$;

$\mathfrak{E}_6$ este expresia $(p \,\&\, q) \to (q \,\&\, p)$;

$\mathfrak{E}_7$ este expresia $(q \,\&\, p) \to (p \,\&\, q)$;

$\mathfrak{E}_8$ este expresia $(p \to q) \to ((q \to p) \to (p \leftrightarrow q))$;

$\mathfrak{E}_9$ este expresia $[(p \,\&\, q) \to (q \,\&\, p) \to \{[(q \,\&\, p) \to (p \,\&\, q)] \to [(p \,\&\, q) \leftrightarrow (q \,\&\, p)]\}$;

$\mathfrak{E}_{10}$ este expresia $[(q \,\&\, p) \to (p \,\&\, q)] \to [(p \,\&\, q) \leftrightarrow (q \,\&\, p)]$;

$\mathfrak{E}_{11}$ este expresia $(p \,\&\, q) \leftrightarrow (q \,\&\, p)$.

Se vede că $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{E}_3$ sînt axiomele 7.11, 7.9, 7.10; $\mathfrak{E}_4$ provine din $\mathfrak{E}_1$, substituind lui p pe $p \,\&\, q$ și lui r pe p; $\mathfrak{E}_5$ provine din $\mathfrak{E}_3$ și $\mathfrak{E}_4$ prin modus ponens; $\mathfrak{E}_6$ provine din $\mathfrak{E}_2$ și $\mathfrak{E}_5$ prin modus ponens; $\mathfrak{E}_7$ provine din $\mathfrak{E}_6$ substituind lui p pe q și lui q pe p; $\mathfrak{E}_8$ este axioma 7.8; $\mathfrak{E}_9$ provine din $\mathfrak{E}_8$ prin substituirea lui $p \,\&\, q$, $q \,\&\, p$ în locul lui p, q; $\mathfrak{E}_{10}$ provine din $\mathfrak{E}_6$ și $\mathfrak{E}_9$ prin modus ponens. $\mathfrak{E}_{11}$ provine din $\mathfrak{E}_7$ și $\mathfrak{E}_{10}$ prin modus ponens.

Vom da următoarea *definiție sintactică* a tezelor logicii propozițiilor:

O expresie $\mathfrak{T}$ este o teză a logicii propozițiilor, dacă există o demonstrație care să o conțină.

Exerciții

Să se demonstreze că

$$(p \vee q) \to (q \vee p),$$
$$(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p),$$
$$(p \vee (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \vee r),$$
$$(p \,\&\, (q \,\&\, r)) \leftrightarrow ((p \,\&\, q) \,\&\, r)$$

sînt teze ale logicii propozițiilor după definiția sintactică.

Vom da *definiția demonstrației din ipotezele* $\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_p$ *în logica propozițiilor*: aceasta este un șir de expresii

$$\mathfrak{E}_1, \ldots \mathfrak{E}_n,$$

în care fiecare $\mathfrak{E}_i$ sau este una din formele α, β, γ (ce intră în definiția demonstrației de la p. 158) sau este una din ipotezele $\mathfrak{H}_1, \ldots \mathfrak{H}_s$.

Exemplu:

$\mathfrak{H}_1$ este expresia p,

$\mathfrak{H}_2$ este expresia $p \leftrightarrow q$,

$\mathfrak{E}_1$ este expresia p,

$\mathfrak{E}_2$ este expresia $p \leftrightarrow q$,

$\mathfrak{E}_3$ este expresia $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$,

$\mathfrak{E}_4$ este expresia $p \rightarrow q$,

$\mathfrak{E}_5$ este expresia q.

$\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$ sînt $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, iar $\mathfrak{E}_3$ este axioma 7.6; $\mathfrak{E}_4$ provine din $\mathfrak{E}_2$ și $\mathfrak{E}_3$ prin modus ponens; $\mathfrak{E}_5$ provine din $\mathfrak{E}_1$ și $\mathfrak{E}_4$ prin modus ponens. Deci șirul $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{E}_3$, $\mathfrak{E}_4$, $\mathfrak{E}_5$ este o demonstrație din ipotezele $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$.

Vom da *definiția sintactică a schemelor deductive valabile în logica propozițiilor*: șirul de expresii

$$\frac{\mathfrak{P}_1 \quad \ldots \quad \mathfrak{P}_r}{\mathfrak{C}}$$

este o schemă deductivă valabilă în logica propozițiilor, dacă există o demonstrație din ipotezele $\mathfrak{P}_1, \ldots \mathfrak{P}$ care să conțină pe $\mathfrak{C}$.

Schema (II) este valabilă după definiția sintactică

Vom enunța *teorema fundamentală a logicii propozițiilor*:

Definiția sintactică și definiția semantică sînt echivalente și pentru teze și pentru schemele deductive valabile.

Pentru demonstrarea acestei teoreme și pentru întreaga dezvoltare a logicii propozițiilor trimitem la un tratat special. Acolo cititorul va putea găsi demonstrațiile sintactice ale tezelor 6.4—6.16, 6.29, 6.33—6.50 și ale schemelor deductive III-V de mai sus, ca și alte teze ale logicii propozițiilor pe care le vom întrebuința în paragraful următor.

Vom defini expresiile în *logica predicatelor* prin

7.17 $A(x),\ldots, B(x,y),\ldots C(x,y,z),\ldots$, sînt expresii în logica predicatelor, $A,\ldots$ fiind predicate, $x,\ldots$ variabile individuale.

7.18 Dacă $\mathfrak{A}$ este o expresie în logica predicatelor, $(x)\,\mathfrak{A}$ și $(Ex)\,\mathfrak{A}$ sînt expresii în logica predicatelor.

7.19. Dacă $\mathfrak{A}$ este o expresie în logica predicatelor, $\neg A$ este de asemenea o expresie în logica predicatelor.

7.20. Dacă $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ sînt expresii în logica predicatelor, $\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\leftrightarrow\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$ sînt expresii în logica predicatelor.

Vom considera următoarele axiome specifice logicii predicatelor :

7.21 $[(x)P(x)]\to P(y)$;

7.22 $\{(x)[\mathfrak{A}\to P(x)]\}\to\{\mathfrak{A}\to[(x)P(x)]\}$;

7.23 $P(x)\to[(Ey)P(y)]$;

7.24 $\{(x)[P(x)\to\mathfrak{A}]\}\to\{[(Ex)P(x)]\to\mathfrak{A}\}$.

În 7.22 și în 7.24 $\mathfrak{A}$ nu trebuie să conțină variabila x.

Vom numi demonstrație în logica predicatelor un șir de expresii în logica predicatelor.

$$\mathfrak{E}_1,\ldots\ \mathfrak{E}_n,$$

astfel ca $\mathfrak{E}_i$ să satisfacă una din condițiile următoare

α) $\mathfrak{E}_i$ provine dintr-o teză a logicii propozițiilor substituind literelor $p,\ldots$ expresii $\mathfrak{A},\ldots$, din logica predicatelor.

β) $\mathfrak{E}_i$ este una din axiomele 7.21—7.24.

γ) Există un $j<i$, astfel încît $\mathfrak{E}_i$ să fie de forma $(\mathfrak{v})\,\mathfrak{E}_j$, $\mathfrak{v}$ fiind o variabilă individuală.

δ) Există un $h<i$ și un $k<i$, astfel ca $\mathfrak{E}_k$ să fie $\mathfrak{E}_h\to\mathfrak{E}_i$.

O teză a logicii predicatelor este o expresie a logicii predicatelor, pentru care există o demonstrație a logicii predicatelor care să o conțină.

Exemple de demonstrație în logica predicatelor sînt deducerile lui 6.4 *, 6. 4 **,... din 6.4, ... Aceste deduceri se fac în baza condiției α. De asemenea, deducerile

lui 6.20° — 6.24° de la p. 136 s-au făcut grație lui γ, numit principiul demonstrației prin generalizare.

Exemplu de demonstrație în logica predicatelor. Șirul de expresii

$$[(x)P(x)] \to P(y), \tag{a}$$

$$\{[(x)P(x)] \to P(y)\} \to \{\neg P(y) \to [\neg(x)P(x)]\}, \tag{b}$$

$$[\neg P(y)] \to \{\neg[(x)P(x)]\} \tag{c}$$

$$(y)\{[\neg P(y)] \to [\neg(x)P(x)]\}, \tag{d}$$

$$((y)\{[\neg P(y)] \to [\neg(x)P(x)]\}) \to$$
$$\to \{[(Ex)\neg P(x)] \to [\neg(x)P(x)]\}, \tag{e}$$

$$[(Ex)\neg P(x)] \to [\neg(x)P(x)], \tag{f}$$

$$[\neg\neg(x)P(x)] \to [\neg(Ex)\neg P(x)], \tag{g}$$

$$[(x)\ P(x)] \to [\neg\neg(x)\ P(x)], \tag{h}$$

$$(x)\ P(x) \to [\neg(Ex)\neg P(x)], \tag{i}$$

$$[\neg P(x) \to [(Ey)\neg P(y)], \tag{j}$$

$$\{\neg P(x) \to [(Ey)\neg P(y)]\} \to$$
$$\to \{[\neg(Ey)\neg P(y)] \to [\neg\neg P(y)]\}, \tag{k}$$

$$[\neg(Ey)\neg P(y)] \to [\neg\neg P(x)], \tag{l}$$

$$[\neg\neg P(x)] \to P(x), \tag{m}$$

$$[\neg(Ey)\neg P(y)] \to P(x), \tag{n}$$

$$[\neg(Ey)\neg P(x)] \to [(x)\ P(x)] \tag{p}$$

este o demonstrație.

Într-adevăr, (a) este 7.21, (b) provine din teza de logica propozițiilor:

$$(p \to q) \to (\neg q \to \neg p) \tag{*}$$

prin substituție; (c) provine din (a), (b) prin modus ponens, (d) provine prin generalizare din (c); (e) este 7,24; (f) provine din (d) și (e) prin modus ponens; (g) provine din (*) prin substituție; (h) provine din 7.16; (i) provine din (h), (g) prin silogism; (j) este 7.23; (k) provine din (*) prin substituție; (l) provine din (k) și (j) prin modus ponens; (m) provine din 7.6 și 7.16; (n) provine din (l)

și (m) prin silogism; (p) din (n) prin generalizare și 7.24; (p) este rezultatul căutat

$$[(x)\ P(x)] \leftrightarrow [\neg (Ex) \neg P(x)], \tag{7.25}$$

$$[(Ex)\ P(x)] \leftrightarrow [(x) \neg P(x)]. \tag{7.26}$$

Să dovedim pe 6.32.

Să considerăm șirul de expresii:

$$\{(x)[P(x) \to Q(x)]\} \to [P(y) \to Q(y)], \tag{a}$$

$$[(x)\ P(x)] \to P(y), \tag{b}$$

$$\{[(x)\ P(x)] \to P(y)\} \to (\{\{(x)[P(x) \to Q(x)]\} \to \to [P(y) \to Q(y))] \to (\{(x)\ P(x)] \to P(y)]\} \& \& (\{(x)[P(x) \to Q(x)] \to [P(y) \to Q(y)]))), \tag{c}$$

$$\{[(x)\ P(x)] \to P(y) \& [\{(x)[P(x) \to Q(x)]\} \to [P(y) \to \to Q(y)], \tag{d}$$

$$\{[[(x)\ P(x)] \to P(y)] \& \{[(x)\ (P(x) \to Q(x)]] \to [P(y) \to \to Q(y)]\} \to (\{[(x)\ P(x)] \& [(x)[P(x) \to \to Q(x)] \to (P(y) \& [P(y) \to Q(y)]\}), \tag{e}$$

$$\{[(x)\ P(x)] \& [(x)[P(x) \to Q(x)]]\} \to \{P(y) \& [P(y) \to \to Q(y)]\}, \tag{f}$$

$$\{P(y) \& [P(y) \to Q(y)]\}) \to Q(y), \tag{g}$$

$$([(x)\ P(x)] \& \{(x)\ P(x) \to Q(x)]\}) \to Q(y), \tag{h}$$

$$([(x)\ P(x)] \& \{(x)[P(x) \to Q(x)]\}) \to [(x)\ Q(x)]), \tag{i}$$

$$(([(x)\ P(x)] \& \{(x)[P(x) \to Q(x)]\}) \to [(x)\ Q(x)]) \to \to (\{(x)[P(x) \to Q(x)] \to \to (\{[(x)\ P(x)] \to [(x)\ Q(x)]\}), \tag{j}$$

$$\{(x)[P(x) \to Q(x)]\} \to \{[(x)\ P(x)] \to [(x)\ Q(x)]\}. \tag{k}$$

În acest șir (a) și (b) sînt 7.21; (c) provine din teza de logica propozițiilor:

$$p \to (q \to (p \ \& \ q)),$$

prin substituție; (d) provine aplicînd lui (c) modus ponens întîi cu (b) apoi cu (a); (e) provine din teza de logica propozițiilor

$$[(p \to q) \,\&\, (r \to s)] \to [(p \,\&\, r) \to (q \,\&\, s)]$$

prin substituție; (f) provine din (e) și (d) prin modus ponens; (g) provine din teza de logica propozițiilor

$$(p \,\&\, (p \to q)) \to q$$

prin substituție; (h) provine din (f) și (g) prin silogismul ipotetic; (i) provine din (h) prin regula 7.22 și modus ponens; (j) provine din teza de logică clasică

$$((p \,\&\, q) \to r) \to (q \to (p \to r))$$

prin substituție; (k) provine din (j) și (i) prin modus ponens.

Pentru dezvoltarea logicii predicatelor trimitem la tratate speciale; acolo se va găsi și înțelesul unei definiții semantice a tezelor logicii predicatelor.

IDENTITATEA

Relația de identitate „=" se bucură de următoarele proprietăți esențiale:

7.25 $\quad a = a,$

7.26 $\quad (a = b) \to [P(a) \to P(b)].$

În logica predicatelor și a identității vom defini expresiile prin 7.17—7.20 și prin:

7.27 $\mathfrak{v}' = \mathfrak{v}''$ este o expresie, dacă $\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{v}''$ sînt variabile individuale; vom defini demonstrațiile ca în paragraful precedent, dar la punctul β al definiției vom adăuga axiomele 7.25, 7.26, iar la punctul α vom înlocui cuvintele „expresii $\mathfrak{A}, \ldots$, din logica predicatelor", cu cuvintele „expresii $\mathfrak{A}, \ldots$, din logica predicatelor și a identității".

Exemplu de demonstrație:
Să considerăm șirul de expresii:

$$(a = b) \to [(a = c) \to (b = c)], \tag{a}$$

$$\{(a = b) \to [(a = c) \to (b = c)]\} \to \{(a = c) \to \to [(a = b) \to (b = c)]\}, \tag{b}$$

$$(a = c) \to [(a = b) \to (b = c)], \tag{c}$$

$$(a = a) \to [(a = b) \to (b = a)], \tag{d}$$

$$(a = b) \to (b = a), \tag{e}$$

$$(c = a) \to [(a = b) \to (b = c)], \tag{f}$$

$$[(c = a) \,\&\, (a = b)] \to (b = c), \tag{g}$$

$$[(c = a) \,\&\, (a = b)] \to (c = b), \tag{h}$$

$$(c = a) \to [(a = b) \to (c = b)]. \tag{i}$$

Acest șir este o demonstrație, căci (a) este 7.26, luînd ca $P(x)$ predicatul $x = c$; (b) provine prin substituția din teza de logica propozițiilor

$$[p \to (q \to r)] \to [q \to (p \to r)];$$

(c) provine din (b) și (a) prin modus ponens; (d) provine din (c) prin substituție; (e) provine din (d) și 7.25 prin modus ponens, (f) provine din $(c = a) \to (a = c)$ — care provine din (e) prin substituția lui a cu c și a lui b cu a și (c) prin silogism ipotetic; (g) provine din (f) prin modus ponens cu o teză ce provine prin substituție din teza de logica propozițiilor

$$(p \to (q \to r)) \to ((p \,\&\, q) \to r);$$

(h) provine din (g) și (e); (i) provine din (h) prin modus ponens cu o teză ce provine prin substituție din teza de logica propozițiilor

$$((p \,\&\, q) \to r) \to (p \to (q \to r)).$$

Tezele (e) și (i) sînt legile de simetrie și tranzitivitate ale egalității

7.27 $(a = b) \to (b = a)$,

7.28 $(a = b) \to ((b = c) \to (a = c))$.

Totuși, o proprietate importantă a identității: dacă x are toate proprietățile lui y, atunci $x = y$ nu poate fi formulată decît sub următoarele forme:

7.29 $\quad (\alpha)\,[(x \in \alpha) \to (y \in \alpha)] \to (x = y),$

7.30 $\quad (P)\,[P(x) \to P(y)] \to (x = y),$

adică utilizînd cuantificatorul (α): pentru orice mulțime, sau cuantificatorul (P): pentru orice proprietate, care ne fac să ieșim din cadrele acestui volum.

Axiomele 7.4—7.16, 7.21—7.26, modus ponens și principiul generalizării sînt suficiente nu numai pentru a justifica proprietățile din cap. I, ci și cele din cap. II, precum și definiția relațiilor funcționale, deci proprietățile din cap. III. Într-adevăr, $y = f(x)$ este o relație $F(x,y)$ care satisface condițiile

$$(x)\,(Ey)\;F(x, y),$$

$$(x)\,(y)\,(z)\,\{[F(x, y)\ \&\ F(x, z)] \to (y = z)\}.$$

Produsul a două relații este și el definit prin

$$[x(RS)\ y] \leftrightarrow (Et)\ [(x\ R\ t)\ \&\ (t\ S\ y)].$$

Mai mult decît atît, 7.17 permite studiul relațiilor ternare, quaternare, etc.

Faptul că există cel mult un individ cu proprietatea P se scrie:

$$(x)\,(y)\,\{[P(x)\ \&\ P(y)] \to (x = y)\};$$

faptul că există cel mult doi se scrie:

$$(x)\,(y)\,(z)\ \{[P(x)\ \&\ P(y)\ \&\ P(z)] \to$$

$$\to [(x = y) \vee (y = z) \vee (x = z)]\};$$

iar faptul că există cel puțin doi se scrie:

$$(Ex)\ (Ey)\,[P(x)\ \&\ P(y)\ \&\ (x \neq y)]$$

și așa mai departe.

Aceasta este logica predicatelor de ordinul I.

Studiul proprietăților din cap. IV privind mulțimile de mulțimi ca și cel al predicatelor de relații (de pildă, tranzitivitatea unei relații) iese din cadrele logicii predicatelor de ordinul I.

MULȚIMEA ELEMENTELOR CE AU O PROPRIETATE DATĂ

Fie P o proprietate. Numim

$$\mathcal{E}(x|P(x))$$

mulțimea tuturor indivizilor x care au proprietatea R, deci

$$\{a \in \mathcal{E}(x|P(x)\} \leftrightarrow P(a).$$

E ușor de văzut că

$$\mathcal{E}(x|A(x)\ \&\ B(x)) = \mathcal{E}(x|A(x)) \cap \mathcal{E}(x|B(x)),$$
$$\mathcal{E}(x|A(x) \vee B(x) = \mathcal{E}(x|A(x)) \cup \mathcal{E}(x|B(x)),$$
$$\mathcal{E}(x|\neg A(x)) = \overline{\mathcal{E}(x|A(x)}$$

și că

$(x)\,[A(x) \rightarrow B(x)]$ echivalează cu $\mathcal{E}(x|A(x)) \subset \mathcal{E}(x|B(x))$,

$(x)\,[A(x) \leftrightarrow B(x)]$ echivalează cu $\mathcal{E}(x|A(x)) = \mathcal{E}(x|B(x))$,

$(x)[\neg A(x)]$ echivalează cu $\mathcal{E}(x|A(x)) = \emptyset$,

$(Ex)\,A(x)$ echivalează cu $\mathcal{E}(x|A(x) \neq \emptyset$.

RELAȚII BINARE ÎNTR-O MULȚIME FINITĂ

Fie M o mulțime cu n elemente ce vor fi numite $e_1, \ldots, e_n$. O relație R între elementele lui M e determinată de cele n^2 propoziții.

p_{ij}: elementul e_i este în relație R cu elementul e_j. Vom numi:

$$r_{ij} = \begin{cases} \textit{adevăr} \text{ dacă elementul } e_i \text{ este în relație } R \text{ cu} \\ \text{elementul } e_j, \\ \textit{fals}, \text{ dacă elementul } e_i \text{ nu este în relația } R \text{ cu} \\ \text{elementul } e_j. \end{cases}$$

Cele n^2 elemente r_{ij} formează o matrice

$$\rho = \{r_{ij}\};$$

ρ va fi matricea asociată relației R; vom scrie

$$\rho = \mathfrak{M}(R).$$

Exerciții

1. $\mathfrak{M}(R \vee S) = \mathfrak{M}(R) \bigcup \mathfrak{M}(S)$

cu

$$\{r_{ij}\} \bigcup \{s_{ij}\} = \{r_{ij} \bigcup s_{ij}\}.$$

2. $\mathfrak{M}(R \,\&\, S) = \mathfrak{M}(R) \bigcap \mathfrak{M}(S)$

cu

$$\{r_{ij}\} \bigcap \{s_{ij}\} = \{r_{ij} \bigcap s_{ij}\}.$$

3. $\mathfrak{M}(\neg R) = \overline{\mathfrak{M}(R)}$

cu

$$\overline{\{r_{ij}\}} = \{\bar{r}_{ij}\}$$

4. $\mathfrak{M}(R\,S) = \mathfrak{M}(R)\,\mathfrak{M}(S)$

cu

$$\{r_{ij}\}\{s_{ij}\} = \{\bigcup_t (r_{it} \bigcap s_{tj})\},$$

unde $r_{ij} \bigcup s_{ij}$, $r_{ij} \bigcap s_{ij}$, $\bar{r}_{ij}$ sînt date de tabelele de la pp. 119, 152.

5. $\mathfrak{M}(=) = \{e_{ij}\}$,

unde

$$e_{ij} = \begin{cases} \text{adevăr}, & \text{dacă } i = j, \\ \text{fals}, & \text{dacă } i \neq j, \end{cases}$$

6. $\mathfrak{M}(I) = \{\text{adevăr}\}$,

7. $\mathfrak{M}(\emptyset) = \{\text{fals}\}$,

unde {adevăr}, {fals}, sînt matricele ale căror elemente sînt toate „adevăr", respectiv toate „fals".

8. $\mathfrak{M}(\breve{R}) = \widetilde{\mathfrak{M}(R)}$,

unde

$$\widetilde{\{r_{ij}\}} = \{r_{ji}\}.$$

9. $R \Rightarrow S$ echivalează cu $r_{ij} \subset s_{ij}$.

10. Reflexivitatea relației R echivalează cu

$$r_{ii} = \text{adevăr}.$$

11. Simetria relației R echivalează cu

$$r_{ij} = r_{ji}.$$

12. Tranzitivitatea relației R echivalează cu

$$r_{ih} \cap r_{hj} \subset r_{ij}.$$

13. Antisimetria relației R echivalează cu

$$r_{ij} \cap r_{ji} = \text{fals pentru } i \neq j.$$

14. Antisimetria strictă a relației R echivalează cu

$$r_{ij} \cap r_{ji} = \text{fals}.$$

Matricele cu elementele 0 (= fals) și 1 (= adevăr), sînt un caz particular al matricelor cu elementele într-o algebră booleană.

Definițiile date mai sus pentru $\{r_{ij}\} \cup \{s_{ij}\}$, $\{r_{ij}\} \cap \{s_{ij}\}$, $\overline{\{r_{ij}\}}$, $\widehat{\{r_{ij}\}}$, $\{r_{ij}\} \subset \{s_{ij}\}$ se extind acestui caz. *Matricele cu n linii și coloane, cu elementele într-o algebră booleană formează o algebră booleană*; demonstrațiile ca exerciții.

În afară de produsul definit la 4, putem introduce produsul dual

$$\{r_{ij}\} * \{s_{ij}\} = \{ \bigcap_t (r_{it} \cup s_{ti}) \}.$$

Teoria se poate extinde cazului infinit.

TEORIA GRAFURILOR

Noțiunea de relație, mai ales în cazul relațiilor al căror domenii și codomenii sînt finite, se studiază azi sub o formă geometrică în așa numita teorie a grafurilor. Un graf este o relație al cărei domeniu și codomeniu coincid; aceasta nu este de altfel o restricție, deoarece dacă X este domeniul și Y codomeniul relației R, relația poate fi extinsă la relația R *, al cărui domeniu și codomeniu sînt identice cu $X \cup Y$, iar $x\ R^*\ y$ este falsă dacă $x \notin X$ sau dacă $y \notin Y$ și este în același timp cu $x\ R\ y$ adevărată sau falsă dacă $x \in X$ și $y \in Y$.

Unui graf finit i se asociază o matrice cu elementele 0, 1 ca mai sus și un desen format dintr-un sistem de săgeți, săgeata *ab* figurînd în desen dacă propoziția *a R b* este adevărată; aceste săgeți se numesc *arcele* grafului; *a* și *b* sînt extremitățile, vîrfurile sau nodurile arcului *ab*, *a* este nodul inițial, *b* nodul final. În desen ele sînt notate prin puncte.

Un graf finit este un *complex 1-dimensional* orientat, adică un sistem format din:

α) simplexele 0-dimensionale, care sînt nodurile $x_0^1 . . , x_0^{\alpha_0}$ ale grafului;

β) simplexele 1-dimensionale, care sînt arcele $x_1^1, . . . , x_1^{\alpha_1}$ ale grafului;

γ) matricea de incidență (orientată), care este matricea $\{\varepsilon_{ij}\}, 1 \leqslant i \leqslant \alpha_0, 1 \leqslant j \leqslant \alpha_1$ *cu* $\varepsilon_{ij} = -1$ *dacă* $\mathscr{X}_0^i$ *este nodul inițial al lui* $\mathscr{X}_1^j$, $\varepsilon_{ij} = +1$ *dacă* $\mathscr{X}_0^i$ *este nodul final al lui* $\mathscr{X}_1^j$ $\varepsilon_{ij} = 0$ *dacă* $\mathscr{X}_0^i$ *nu este niciuna din extremitățile lui* $\mathscr{X}_1^j$.

Matricea de incidență (neorientată) este matricea $\{\eta_{ij}\}$ cu elementele $\eta_{ij} = |\varepsilon_{ij}|$.

Un lanț n-dimensional al complexului (n = 0, 1) este un element al lui $A^{\alpha n}$; îl vom scrie:

$$x_n = \lambda_1 x_n^1 + \quad , + \lambda_{\alpha_n} x_n^{\alpha_n}.$$

Lanțurile n-dimensionale ($n = 0,1$) formează două grupuri C_0, C_1.

Frontiera lanțului 0-dimensional x_0 este elementul $\delta(x_0) = \sum_j \lambda_j$.

Frontiera lanțului 1-dimensional x^1 este lanțul 0-dimensional

$$\delta(x_1) = \sum_{i,j} \lambda_j \ \varepsilon_{ij} \ x_0^i.$$

Un lanț cu frontiera nulă e numit un ciclu. Ciclurile n-dimensionale formează două grupuri Z_0, Z_1. Un lanț 0-dimensional x_0 e numit ciclu frontieră al lanțului 1-dimensional x_1 dacă

$$x_0 = \delta(x_1)$$

Se demonstrează că orice frontieră e un ciclu. Ciclurile frontieră F_n formează un subgrup al lui Z_n. Grupul factor Z_n/F_n este numit grupul de omologie.

Cofrontiera lanțului zero-dimensional x_0 este lanțul unidimensional

$$\partial (x_0) = \sum_{i,j} \lambda_j \varepsilon_{ji} x_1^i.$$

Cofrontiera lanțului 1-dimensional $x_1 (n = 1)$ este elementul

$$\partial (x_1) = \sum_j \lambda_j$$

Lanțurile cu cofrontieră nulă vor fi numite cocicluri. Ele formează un grup Z^n.

Lanțurile care sînt cofrontiera unui lanț vor fi numite cocicluri cofrontieră. Ele formează un subgrup al precedentului F^n.

Grupul factor Z^n/F^n este numit grupul de coomologie.

O noțiune geometrică importantă legată de cele de mai sus este aceea de *drum*. Un șir de noduri

$$a_1, \ldots, a_n \qquad (*)$$

formează un drum deschis care merge din a în b dacă $a_1 = a$, $a_n = b$ și $a_i a_{i+1}$ este un simplex (orientat) al complexului. Nodurile a_1, a_n sînt cele două extremități ale drumului deschis (nodul inițial și nodul final). Șirul de noduri (*) este un drum închis dacă $a_1 = a_n$ și $a_i\, a_{i+1}$ (inclusiv $a_n a_1$) este un simplex orientat al complexului.

Ciclurile unidimensionale sînt sume de drumuri închise, fiecare cu multiplicitatea lui.

Două noduri sînt conexe dacă ele sînt extremitățile unui drum.

Un ciclu zero-dimensional e format din perechile de extremități ale unor drumuri, fiecare luat cu multiplicitatea lui.

Un graf se spune că e *tare conex* dacă două noduri oarecare ale lui sînt conexe. Un graf este *conex* dacă date fiind două noduri ale lui a și b există un șir de noduri ale lui: $c_1 = a, \ldots, c_r = b$ astfel ca $c_i\, c_j$ să fie conexe.

Pentru a înțelege importanța practică a teoriei grafurilor să ne gîndim că o pereche (a,b) de puncte din plan sau din spațiu apare în cazuri ca următoarele:

1. a, b sînt nodurile unei rețele electrice iar arcul ab este o porțiune de conductor electric prin care trece sau nu curentul.

Rețeaua poate fi o rețea cu rezistențe ohmice, capacități sau o rețea cu contacte.

2. a, b sînt două localități într-o rețea de transport (de pildă de cale ferată sau de șosele), iar arcul ab este elementul de șosea dintre ele.

TEORIA TIPURILOR

Teoria abstractă a mulțimilor poate fi dezvoltată pornind de la exemplul teoriei mulțimilor de puncte din plan, așa cum am făcut-o pînă acum.

În acest exemplu avem de-a face de la început cu:

— indivizi, care sînt în acest caz particular puncte din plan; fie I_1 totalitatea lor;

— mulțimi de indivizi, care sînt submulțimi ale lui I_1, fie I_2 totalitatea lor;

— mulțimi de mulțimi de indivizi, care sînt submulțimi ale lui I_2; fie I_3 totalitatea lor;

— mulțimi de mulțimi de mulțimi de indivizi; care sînt submulțimi ale lui I_3; fie I_4 totalitatea lor ș.a.m.d.

Dacă a este un individ, iar α_1 o mulțime de indivizi, expresiile $a \in \alpha_1$ și $a \notin \alpha_1$ au un sens: un individ aparține sau nu aparține unei mulțimi de indivizi.

Dacă însă α_2 este o mulțime de mulțimi de indivizi, în timp ce

$$\alpha_1 \in \alpha_2 \quad \alpha_1 \notin \alpha_2$$

au înțeles, una din aceste propoziții fiind adevărată, expresiile

$$a \in \alpha_2 \quad a \notin \alpha_2$$

nu au înțeles, deoarece α_2 nefiind o mulțime de indivizi, nu are sens să ne întrebăm dacă un individ îi aparține sau nu.

Propozițiile $\{a\} \in \alpha_2$, respectiv $\{a\} \notin \alpha_2$ au însă înțeles.

În schimb, propozițiile $\{a\} \in \alpha_1, \{a\} \notin \alpha_1$ nu au înțeles, deoarece și $\{a\}$ și α_1 sînt mulțimi de indivizi. Propoziția $\{a\} \subset \alpha_1$ are însă înțeles și ea echivalează cu $a \in \alpha_1$.

Dacă α_1 e o mulțime de indivizi

$$\alpha_1 \subset \mathrm{I}_1,$$

iar dacă α_2 e o mulțime de mulțimi de indivizi

$$\alpha_2 \subset \mathrm{I}_2$$

ș.a.m.d.

Așadar, mulțimile sînt de diferite tipuri:

tipul 1 al mulțimilor de indivizi;

tipul 2 al mulțimilor de mulțimi de indivizi;

tipul 3 al mulțimilor de mulțimi de mulțimii de indivizi,

.. ..

tipul $n+1$ al mulțimilor de mulțimi de tipul n.

Am numit I_1 totalitatea indivizilor, I_2 totalitatea mulțimilor de indivizi, I_n totalitatea mulțimilor de tipul $n-1$.

Cele spuse mai sus înseamnă că:

$a \in \alpha_1$ are înțeles, dacă $a \in \mathrm{I}_1$, $\alpha_1 \in \mathrm{I}_2$,

$\alpha_1 \in \alpha_2$ are înțeles, dacă $\alpha_1 \in \mathrm{I}_2$, $\alpha_2 \in \mathrm{I}_3$,

$\alpha_2 \in \alpha_3$ are înțeles, dacă $\alpha_2 \in \mathrm{I}_3$, $\alpha_3 \in \mathrm{I}_4$,

și, în genere

$$\alpha \in \beta$$

are înțeles dacă tipul lui β este mai mare cu o unitate decît tipul lui α, și numai în acest caz.

Să considerăm formula (3) de la p. 107. Pentru a o stabili, am considerat un individ oarecare x, deci $x \in \mathrm{I}_1$ și mulțimi α_1 de indivizi $\alpha_1 \in \mathrm{I}_2$; expresia: „există un α astfel ca . " se traduce prin $(E\alpha)[(\alpha \in \mathrm{I}_2) \,\&\, (x \in \alpha)]$; dar $\{x\} \in \mathrm{I}_2$ și $x \in \{x\}$, deci teorema (3) trebuie scrisă:

$$\bigcup_{\alpha_1 \in \mathrm{I}_2} \alpha_1 = \mathrm{I}_1.$$

Mai general

$$\bigcup_{\alpha_n \in I_{n+1}} \alpha_n = I_n.$$

Să considerăm mulțimea vidă din formula (1) p. 106. În reuniunea $\bigcup_{\alpha \in \varnothing} \alpha$ semnul $\varnothing$ înseamnă: mulțimea de mulțimi care nu are nici un element, deci mulțimea de mulțimi — o vom numi $\varnothing_2$ —, astfel ca pentru orice mulțime α_1 să avem $\alpha_1 \notin \varnothing_2$. În schimb, în membrul al doilea semnul $\varnothing$ înseamnă „mulțimea pentru care nici un individ nu-i este element", căci $x \in \bigcup_{\alpha_1 \in \varnothing_2} \alpha_1$ înseamnă $(E\alpha_1)[\alpha_1 \in \varnothing_2) \,\&(x \in \alpha_1)]$, deci $\bigcup_{\alpha_1 \in \varnothing_2} \alpha_1 = \varnothing_1$. Deci formula (1) ar trebui scrisă

$$\bigcup_{\alpha_1 \in \varnothing_2} \alpha_1 = \varnothing_1$$

cu două mulțimi vide:

mulțimea $\varnothing_1$ care nu are nici un element, dar care este o mulțime de tip 1, deci $\varnothing_1 \in I_2$;

mulțimea $\varnothing_2$ care nu are nici un element, dar care este o mulțime de tip 2; și, mai general

$$\bigcup_{\alpha_n \in \varnothing_n} \alpha_n = \varnothing_n$$

ș.a.m.d.

Analog, formulele (2) și (4) ar trebui să fie scrise:

$$\bigcap_{\alpha_1 \in \varnothing_2} \alpha_1 = I_1 \qquad \bigcap_{\alpha_1 \in I_2} \alpha_1 = \varnothing_1.$$

sau mai general

$$\bigcap_{\alpha_n \in \varnothing_{n+1}} \alpha_n = I_n \qquad \bigcap_{\alpha_n \in I_{n+1}} \alpha_n = \varnothing_n.$$

Teoria tipurilor a fost introdusă pentru a evita celebrele paradoxuri ale teoriei mulțimilor. Iată, ca exemplu, *paradoxul mulțimii tuturor mulțimilor ce nu se conțin ca element.*

Pentru o mulțime α în genere — indiferent că este o mulțime de indivizi, de mulțimi etc. — putem presupune că propoziția $\alpha \in \alpha$ este adevărată, adică mulțimea α se conține ca element;

propoziția $\alpha \in \alpha$ este falsă, adică mulțimea α nu se conține ca element.

Dacă acceptăm despărțirea în tipuri, propozițiile $\alpha \in \alpha$ și $\alpha \notin \alpha$ nu au niciodată sens, deci dilema de mai sus nu are sens și nu are sens să considerăm mulțimea M a tuturor mulțimilor ce nu se conțin ca element. Definiția mulțimii M

$$(\alpha \in M) \leftrightarrow (\alpha \notin \alpha)$$

nu are sens.

Dacă însă nu acceptăm teoria tipurilor, această definiție are sens. Ea însă conduce la un paradox, căci

$$(M \in M) \leftrightarrow (M \notin M),$$

adică propoziția $M \in M$ echivalează cu $M \notin M$. Acesta este celebrul paradox al mulțimii tuturor mulțimilor ce nu se conțin pe ele însele.

Dificultăți de acest tip ne arată că teoria naivă a mulțimilor trebuie depășită. Acest lucru se face prin teoria axiomatică a mulțimilor, pe care însă nu o vom studia aici.

Împărțirea mulțimilor în tipuri corespunde unei împărțiri în tipuri a predicatelor și relațiilor. Propozițiile din cap. I sînt propoziții care afirmă proprietăți ale mulțimilor, deci ale predicatelor de o variabilă.

Să considerăm ca proprietăți următoarele:

— predicatul $A(x)$ este satisfăcut de un individ, dar numai de unul, ceea ce se scrie $[(Ex)A(x)] \,\&\, \{(x)(y)([A(x)\,\&\, \&A(y)] \rightarrow (x = y))\}$;

— predicatul $B(x)$ este satisfăcut de doi indivizi diferiți, dar nu există trei indivizi diferiți care să-l satisfacă, ceea ce se scrie $(Ex)(Ey)\ \{(x \neq y)\&B(x)\&B(y)\}\& \&(x)(y)(z)\ \{[B(x)\&B(y)\&B(z)] \rightarrow [(x=y) \cup (y = z) \cup (z = = x)]\}$.

Astfel avem proprietăți ale predicatelor $A(x)$, $B(x)$.

Tot astfel: reflexivitatea, simetria, antisimetria, tranzitivitatea sînt proprietăți ale relațiilor binare.

Avem o altă ierarhie: ierarhia tipurilor de predicate.

Se pune întrebarea: este teoria tipurilor necesară pentru dezvoltarea teoriei mulțimilor? Înțelegerea corectă

a întrebării şi a răspunsurilor ce i se pot da va fi găsită de cititor în alte tratate în care se studiază o teorie mai puţin naivă a mulţimilor.

Totuşi trebuie să observăm că dacă nu putem considera că mulţimea tuturor mulţimilor e o mulţime şi deci nu putem face asupra ei consideraţiile ce se fac de obicei asupra mulţimilor, ar fi exagerat să spunem că nu putem nicicum vorbi despre totalitatea mulţimilor.

Pentru această totalitate, pe care o numim clasa mulţimilor şi o notăm cu Ens, putem introduce noţiunea de apartenenţă, ideea

$$A \in \mathrm{Ens}$$

avînd un înţeles, şi fiind adevărată cînd A este o mulţime şi falsă cînd A nu este o mulţime (de exemplu $\mathrm{Ens} \notin \mathrm{Ens}$).

Dacă A, B sînt două mulţimi putem introduce totalitatea Hom (A,B) a funcţiilor cu argumentul în A şi valoare în B; $u \in \mathrm{Hom}(A,B)$ va fi notat prin

$$u : A \to B$$

Putem introduce axioma: *Hom* (A,B) *e o mulţime.*

Suprapunerea $\varphi \circ u$ a funcţiilor poate fi definită pentru orice triplet de mulţimi A, B, C: dacă $u \in \mathrm{Hom}(A,B)$ $\varphi \in \mathrm{Hom}(B,C)$, atunci $\varphi \circ u \in \mathrm{Hom}(A,C)$ şi legea de compoziţie „$\circ$" este asociativă, iar funcţiile identice i_A dau pentru orice $u \in \mathrm{Hom}\ (A, B)$

$$i_B u = u i_A = u$$

În fine, dacă perechile (A,B) şi (C,D) sînt distincte $\mathrm{Hom}(A,B)$ şi $\mathrm{Hom}(C,D)$ sînt disjuncte.

Vom introduce noţiunea de *categorie.*

O categorie $\mathcal{C}$ este o pereche:

$$\mathcal{C} = (\mathrm{Ob}\ \mathcal{C},\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}})$$

formată din

α) o clasă Ob $\mathcal{C}$ (elementele lui Ob $\mathcal{C}$ sînt numite obiectele lui $\mathcal{C}$);

β) o funcţie $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}$ cu două variabile în Ob $\mathcal{C}$ şi valorile $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ mulţimi.

Dacă perechile (A,B) şi (C,D) sînt distincte $\mathrm{Hom}\ (A,B)$ şi $\mathrm{Hom}\ (C,D)$ sînt disjuncte.

Elementele clasei

$$\bigcup_{\substack{A \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C} \\ B \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$$

vor fi numite morfismele lui $\mathcal{C}$.

γ) O lege de compoziție „∘" care face ca lui $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$, $v \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C)$ să-i corespundă $v \circ u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,C)$, această lege fiind asociativă

$$w \circ (v \circ u) = (w \circ v) \circ u$$

δ) Hom (C,C) nu e vidă, ci are cel puțin un element $1_C \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,C)$ astfel ca dacă $u \in \mathrm{Hom}(A,B)$ atunci

$$1_B \circ u = u \circ 1_A = u$$

În afară de Ens alte categorii sînt:

Categoria grupurilor, ale cărei obiecte sînt grupurile, morfismele ei fiind omomorfismele de grup.

Categoria inelelor ale cărei obiecte sînt inelele, morfismele ei fiind omomorfismele de inel.

Categoria modulelor, ale cărei obiecte sînt modulele, morfismele ei fiind omomorfismele de modul.

Categoria spațiilor topologice, ale cărei obiecte sînt spațiile topologice, morfismele ei fiind funcțiile continue.

Categoria spațiilor diferențiabile, morfismele lor sînt transformările diferențiabile.

Categoria automatelor ale cărei obiecte sînt automatele:

Pentru teoria categoriilor trimitem la volumul I. Bucur, *Algebra omologică*, precum și la Cabiria Andreian Cazacu, Aristide Deleanu și Martin Jurchescu: *Topologie, categorii, suprafețe riemanniene*, Editura Academiei.

Cele spuse ne arată că noțiunea de clasă (clasa nu are decît unele din proprietățile mulțimilor) e necesară.

Pentru o expunere a teoriei mulțimilor și a claselor trimitem la cartea lui Cornel Constantinescu, *Teoria mulțimilor*, Editura Academiei, 1962.

Putem proceda însă altfel. Numai cu formalismul logicei predicatelor vom introduce relațiile binare „ = " și „ ∈ " cu un singur tip de indivizi mulțimile și cu anume axiome.

VIII

Aplicațiile logicii matematice

APLICAȚII LA TEORIA CLASIFICĂRII

Să presupunem că avem diferite obiecte formînd mulțimea I și să considerăm o proprietate a lor; fie α mulțimea obiectelor care au proprietatea A și $\bar{\alpha}$ cea a obiectelor care n-au această proprietate. Cele două principii, al terțiului exclus și al contradicției

$$\alpha \cup \bar{\alpha} = \mathrm{I}$$
$$\alpha \cap \bar{\alpha} = \emptyset,$$

arată că:

1. Orice obiect aparține uneia din mulțimile α, $\bar{\alpha}$.
2. Nici un obiect nu aparține și mulțimii α și mulțimii $\bar{\alpha}$.

Dacă considerăm două proprietăți A și B, obiectele pot fi de patru categorii:

Fie α mulțimea obiectelor care au proprietatea A; $\bar{\alpha}$ cea a obiectelor care nu o au; β mulțimea obiectelor care au proprietatea B; $\bar{\beta}$ cea a celor care nu o au; obiectele sînt de patru categorii (fig. 53):

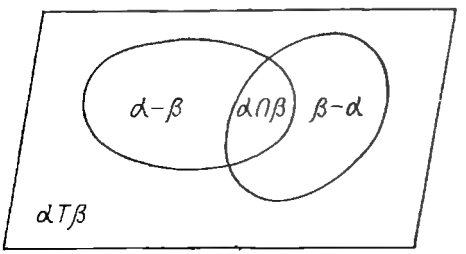


Fig. 53

— cele care au și proprietatea A și proprietatea B; ele formează mulțimea $\alpha \cap \beta$;

— cele care au proprietatea A, dar nu au proprietatea B; ele formează mulțimea $\alpha - \beta$;

— cele ce nu au proprietatea A, dar au proprietatea B; ele formează mulțimea $\beta - \alpha$;

— cele ce nu au nici proprietatea A, nici proprietatea B; ele formează mulțimea $\alpha \top \beta$.

E evident că:

1. Orice obiect aparține uneia din cele patru mulțimi de mai sus:

$$(\alpha \cap \beta) \cup (\alpha - \beta) \cup (\beta - \alpha) \cup (\alpha \top \beta) = \mathrm{I}. \qquad (*)$$

2. Nici un obiect nu aparține în același timp la două din aceste mulțimi

$$\begin{aligned}
&(\alpha \cap \beta) \cap (\alpha - \beta) = \emptyset,\\
&(\alpha \cap \beta) \cap (\beta - \alpha) = \emptyset,\\
&(\alpha \cap \beta) \cap (\alpha \top \beta) = \emptyset, \qquad (**)\\
&(\alpha - \beta) \cap (\beta - \alpha) = \emptyset,\\
&(\alpha - \beta) \cap (\alpha \top \beta) = \emptyset,\\
&(\beta - \alpha) \cap (\alpha \top \beta) = \emptyset.
\end{aligned}$$

Demonstrația formulei (*) e următoarea:

$$\begin{aligned}
(\alpha \cap \beta) \cup (\alpha - \beta) \cup (\beta - \alpha) \cup ((\alpha \top \beta) &= \\
= (\alpha \cap \beta) \cup (\alpha \cap \bar{\beta}) \cup (\bar{\alpha} \cap \beta) \cup (\bar{\alpha} \cap \bar{\beta}) &\\
= [\alpha \cap (\beta \cup \bar{\beta})] \cup [\alpha \cap (\beta \cup \bar{\beta})] &\\
= (\alpha \cap \mathrm{I}) \cup (\bar{\alpha} \cap \mathrm{I}) &\\
= \alpha \cup \bar{\alpha} &\\
= \mathrm{I}. &
\end{aligned}$$

Demonstrația primei formule (**) este

$$\begin{aligned}
(\alpha \cap \beta) \cap (\alpha - \beta) &= (\bar{\alpha} \cap \beta) \cap (\alpha \cap \bar{\beta})\\
&= (\alpha \cap \alpha) \cap (\beta \cap \bar{\beta})\\
&= \alpha \cap \emptyset\\
&= \emptyset.
\end{aligned}$$

Demonstrația celorlalte formule (**) o lăsăm pe seama cititorului.

Formula (*) ne dă clasificarea tuturor obiectelor în patru clase disjuncte, ținînd seama de cele două proprietăți.

Dacă considerăm trei proprietăți A, B, C, putem avea opt mulțimi:

$\alpha \cap \beta \cap \gamma$, care e mulțimea obiectelor ce au toate trei proprietățile A, B, C;

$\bar{\alpha} \cap \beta \cap \gamma$, $\alpha \cap \bar{\beta} \cap \gamma$, $\alpha \cap \beta \cap \bar{\gamma}$, care sînt mulțimile obiectelor ce au două din proprietățile A, B, C, dar nu pe toate trei;

$\alpha \cap \bar{\beta} \cap \bar{\gamma}$, $\bar{\alpha} \cap \beta \cap \bar{\gamma}$, $\alpha \cap \bar{\beta} \cap \gamma$, care sînt mulțimile obiectelor ce nu au decît una din cele trei proprietăți A, B, C;

$\bar{\alpha} \cap \bar{\beta} \cap \bar{\gamma}$, care e mulțimea obiectelor ce nu au nici una din proprietățile A, B, C.

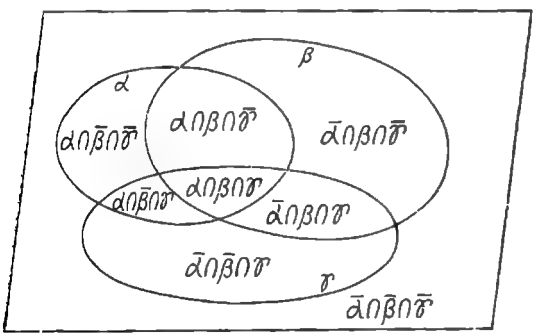


Fig. 54

1. Reuniunea acestor opt mulțimi dă mulțimea totală

$$(\alpha \cap \beta \cap \gamma) \cup (\bar{\alpha} \cap \beta \cap \gamma) \cup (\alpha \cap \bar{\beta} \cap \gamma) \cup (\alpha \cap \beta \cap \bar{\gamma}) \cup$$
$$\cup (\alpha \cap \bar{\beta} \cap \bar{\gamma}) \cup (\bar{\alpha} \cap \beta \cap \bar{\gamma}) \cup (\bar{\alpha} \cap \bar{\beta} \cap \gamma)$$
$$\cup (\bar{\alpha} \cup \cap \bar{\beta} \cap \bar{\gamma}) = \mathrm{I}.$$

2. Fiecare pereche de mulțimi din acestea opt este formată din mulțimi disjuncte.

În genere, dacă considerăm n proprietăți $P_1, \ldots, P_n$, atunci putem descompune mulțimea totală în 2^n mulțimi și anume:

o mulțime a obiectelor ce au toate aceste n proprietăți:

$$\alpha_1 \cap \quad \cap \alpha_n ,$$

n mulțimi de obiecte, fiecare conținînd obiectele ce au n—1 din cele n proprietăți, dar nu o au pe a n-a:

$$\bar{\alpha}_1 \cap \alpha_2 \cap \alpha_3 \cap \quad \cap \alpha_{n-1} \cap \alpha_n ,$$
$$\alpha_1 \cap \bar{\alpha}_2 \cap \alpha_3 \cap \quad \cap \alpha_{n-1} \cap \alpha_n ,$$

$$\alpha_1 \cap \alpha_2 \cap \quad \cap \alpha_{n-2} \cap \bar{\alpha}_{n-1} \cap \alpha_n ,$$
$$\alpha_1 \cap \alpha_2 \cap \ldots \cap \alpha_{n-2} \cap \alpha_{n-1} \cap \bar{\alpha}_n ,$$

$n(n-1)/2$ mulțimi de obiecte, fiecare conținînd obiectele ce au n—2 din cele n proprietăți, dar nu au alte două:

$$\bar{\alpha}_1 \cap \bar{\alpha}_2 \cap \alpha_3 \cap \alpha_4 \cap \quad \cap \alpha_n$$
$$\bar{\alpha}_1 \cap \alpha_2 \cap \bar{\alpha}_3 \cap \alpha_4 \cap \quad \cap \alpha_n ,$$

$$\bar{\alpha}_1 \cap \alpha_2 \cap \alpha_3 \cap \alpha_4 \cap \cdot \quad \cap \alpha_{n-1} \cap \bar{\alpha}_n ,$$
$$\alpha_1 \cap \bar{\alpha}_2 \cap \bar{\alpha}_3 \cap \alpha_4 \cap \quad \cap \alpha_{n-1} \cap \alpha_n ,$$

$$\alpha_1 \cap \bar{\alpha}_2 \cap \alpha_3 \cap \alpha_4 \cap \quad \cap \alpha_{n-1} \cap \bar{\alpha}_n ,$$

$$\alpha_1 \cap \alpha_2 \cap \alpha_3 \cap \quad \cap \alpha_{n-2} \cap \bar{\alpha}_{n-1} \cap \bar{\alpha}_n ,$$

$n(n-1)\ldots(n-r+1)/r!$ mulțimi de obiecte, fiecare conținînd obiectele ce au n—r din cele n proprietăți, dar nu au pe celelalte r,

$n(n-1)/2$ mulțimi de obiecte, fiecare conținînd obiectele ce au două din cele n proprietăți, dar nu au celelalte n—2:

$$\alpha_1 \cap \alpha_2 \cap \bar{\alpha}_3 \cap \bar{\alpha}_4 \cap \quad \cap \bar{\alpha}_n ,$$
$$\alpha_1 \cap \bar{\alpha}_2 \cap \alpha_3 \cap \bar{\alpha}_4 \cap \quad \cap \bar{\alpha}_n ,$$

$$\alpha_1 \cap \bar{\alpha}_2 \cap \bar{\alpha}_3 \cap \bar{\alpha}_4 \cap \quad \cap \bar{\alpha}_{n-1} \cap \alpha_n ,$$
$$\bar{\alpha}_1 \cap \alpha_2 \cap \alpha_3 \cap \bar{\alpha}_4 \cap \quad \cap \bar{\alpha}_{n-1} \cap \bar{\alpha}_n ,$$

$$\bar{\alpha}_1 \cap \alpha_2 \cap \bar{\alpha}_3 \cap \bar{\alpha}_4 \cap \quad \cap \bar{\alpha}_{n-1} \cap \alpha_n ,$$

$$\bar{\alpha}_1 \cap \bar{\alpha}_2 \cap \bar{\alpha}_3 \cap \quad \cap \bar{\alpha}_{n-2} \cap \alpha_{n-1} \cap \alpha_n ,$$

n mulțimi de obiecte, fiecare conținînd obiectele ce nu au decît una din cele n proprietăți, dar nu le au pe celelalte $n-1$:

$$\alpha_1 \cap \bar{\alpha}_2 \cap \bar{\alpha}_3 \cap \ldots \cap \bar{\alpha}_{n-1} \cap \bar{\alpha}_n,$$
$$\bar{\alpha}_1 \cap \alpha_2 \cap \bar{\alpha}_3 \cap \ldots \cap \bar{\alpha}_{n-1} \cap \bar{\alpha}_n,$$

$$\bar{\alpha}_1 \cap \bar{\alpha}_2 \cap \ldots \cap \bar{\alpha}_{n-2} \cap \alpha_{n-1} \cap \bar{\alpha}_n,$$
$$\bar{\alpha}_1 \cap \bar{\alpha}_2 \cap \ldots \cap \bar{\alpha}_{n-2} \cap \bar{\alpha}_{n-1} \cap \alpha_n,$$

o mulțime formată din obiectele ce nu au nici una din cele n proprietăți :

$$\bar{\alpha}_1 \cap \ldots \cap \bar{\alpha}_n.$$

APLICAȚII LA CIRCUITELE CU CONTACTE

Să presupunem că avem diferiți întrerupători; fiecărui întrerupător îi asociem o variabilă $a_1, \ldots, a_r$, care ia valoarea 0 cînd contactul întrerupătorului e în una din poziții și valoarea 1 cînd el e în cealaltă poziție.

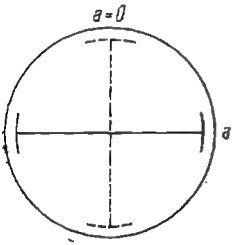


Fig. 55

Dacă montăm două contacte de întrerupători în serie, ca în fig. 56,

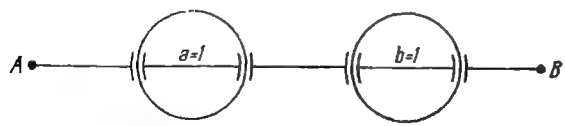


Fig. 56

atunci e vizibil că:

(I) $\begin{cases} \text{dacă } a = 1, b = 1, \text{ deci } ab = 1 \text{ circuitul } AB \text{ conduce;} \\ \text{dacă } a=0, b=1, \text{ deci } ab=0, \text{ circuitul } AB \text{ nu conduce;} \\ \text{dacă } a = 1, b=0, \text{ deci } ab = 0, \text{ circuitul } AB \text{ nu conduce;} \\ \text{dacă } a = 0, b = 0, \text{ deci } ab = 0, \text{ circuitul } AB \text{ nu conduce;} \end{cases}$

deci:

α. dacă $ab = 1$, circuitul cu montaj în serie conduce, iar dacă $ab = 0$, circuitul nu conduce.

Dacă montăm cele două contacte în paralel, ca în fig. 57,

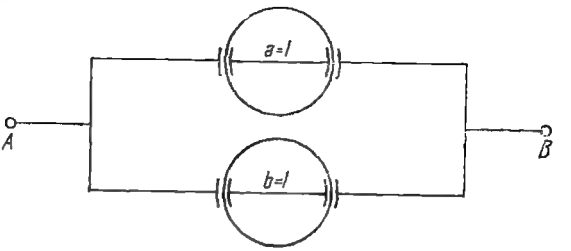


Fig. 57

atunci e vizibil că:

(II) dacă $a=1, b=1$, deci $\max(a,b)=1$, circuitul AB conduce;
dacă $a = 0$, $b = 1$, deci $\max(a,b) = 1$, circuitul AB conduce;
dacă $a = 1$, $b = 0$, deci $\max(a,b) = 1$, circuitul AB conduce;
dacă $a = 0$, $b = 0$, deci $\max(a,b) = 0$, circuitul nu conduce;

deci:

β. dacă $\max(a,b) = 1$, circuitul cu montaj în paralel conduce; dacă $\max(a,b) = 0$, circuitul nu conduce.

Să considerăm circuitul din figura 58:

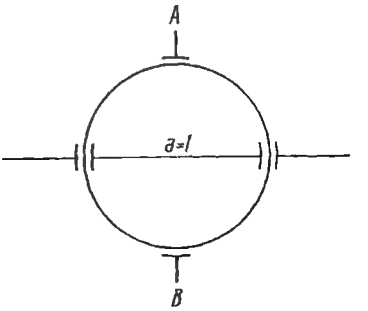


Fig. 58

e vizibil că

(III) $\begin{cases} \text{dacă } a = 1, \text{ circuitul AB nu conduce;} \\ \text{dacă } a = 0, \text{ circuitul AB conduce.} \end{cases}$

Pentru un circuit vom introduce o variabilă c, pe care o numim conductibilitatea lui:

$c = 0$, dacă circuitul nu conduce;

$c = 1$, dacă circuitul conduce.

Analiza făcută ne arată că:

pentru circuitul AB din fig. 56 avem $c = ab$,

pentru circuitul AB din fig. 57 avem $c = \max(a,b)$,

pentru circuitul AB din fig. 58 avem $c = \bar{a}$,

unde am notat $\bar{0} = 1$ și $\bar{1} = 0$.

Să considerăm circuitul din fig. 59.

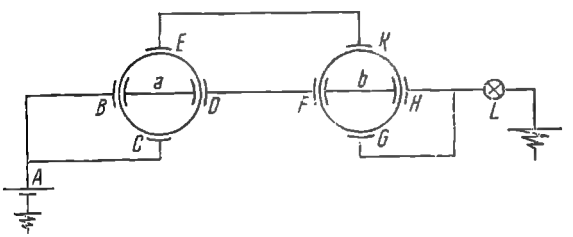


Fig. 59

Fie a conductibilitatea prin contactul BD și b cea prin contactul FH; conductibilitatea prin $BDFH$ este ab.

Conductibilitatea prin CE este $\bar{a}$, cea prin GK este $\bar{b}$, deci cea prin $CEKG$ este $\bar{a}\bar{b}$.

Circuitele $BDFH$ și $CEKG$ sînt montate în paralel, deci conductibilitatea k a circuitului AL este maximul conductibilității lor, deci

$$K = \max\ (ab,\ \bar{a}\bar{b}).$$

Lampa L este aprinsă dacă circuitul AL conduce $k = 1$ și stinsă în caz contrar $k = 0$.

Dacă lampa este stinsă, $k = 0$, deci $ab = \bar{a}\bar{b} = 0$, deci sau a sau b este 0 și sau $\bar{a}$ sau $\bar{b}$ este 0, adică a sau b este 1, deci:

1. sau $a = 0$ $b = 1$,

2. sau $a = 1$ $b = 0$.

Dacă, lampa fiind stinsă, întoarcem unul din comutatoare, atunci:

dacă am întors pe a : din situația 1, ajungem în situația $a = 1$, $b = 1$, deci $k = 1$; din situația 2 ajungem în situația $a = 0$; $b = 0$, deci $\bar{a} = \bar{b} = 1$, deci $k = 1$;

dacă am întors pe b : din situația 1 ajungem în $a = 0$, $b = 0$, deci $\bar{a} = \bar{b} = 1$, deci $k = 1$; din situația 2 ajungem în situația $a = 1$, $b = 1$, deci $k = 1$.

Deci dacă lampa este stinsă, oricare din comutatoare am întoarce lampa se aprinde.

Lăsăm pe cititor să arate că dacă lampa este aprinsă, oricare din comutatoare am întoarce ea se stinge.

Să comparăm cele de mai sus cu tabelele lui &, $\vee$, $\neg$ de la p. 152, respectiv 132.

Se vede că trecem de la valoarea logică la conductibilitate cu următorul dicționar:

poziția contactului întrerupătorului conductibilitatea circuitului	valoarea logică a propoziției
1.	adevăr,
0.....	fals,
montaj în serie (fig. 56)	conjuncție „și“,
montaj în paralel (fig. 57)..	conjuncție „sau măcar“,
montaj invers (fig. 58).	negație.

Acest dicționar ne explică cum calculul logic se poate aplica la studiul circuitelor electrice.

APLICAȚII ÎN ECONOMIA MATEMATICĂ *)

Calculul în algebra booleană poate fi întrebuințat cu succes și într-o serie de probleme cu caracter economic, în care trebuie luate anume decizii binare (*da* sau *nu*). Dăm mai jos un exemplu tipic.

Un anumit produs este consumat în centrele C_1, C_2, C_3, C_4, în cantități de respectiv 10, 12, 8, 10 tone. Pentru fabricarea acestui produs se pot construi fabrici în oricare din localitățile L_1, L_2, L_3, L_4; capacitatea de producție a fiecărei fabrici este suficient de mare pentru a acoperi — dacă este cazul — necesitățile tuturor centrelor de consum C_1, C_2, C_3, C_4. Se prevede ca în fiecare an, pentru fiecare fabrică construită, să se amortizeze cîte 3,5 unități bănești din costul ei. Costul transportării unei tone de produs de la diverșii producători posibili L_1, L_2, L_3, L_4, la diverșii consumatori C_1, C_2, C_3, C_4, este dat în tabelul de mai jos:

	C_1	C_2	C_3	C_4
L_1	0,7	0,6	1	0,9
L_2	1	0,7	0,4	0,5
L_3	0,3	0,9	0,6	0,3
L_4	0,4	0,8	0,8	0,4

Se pune problema de a decide în care anume dintre localitățile date se vor construi fabrici, în așa fel încît costul total anual (amortizarea + transporturile) să fie minim.

---

* Acest paragraf a fost alcătuit de P. L. Ivănescu și S. Rudeanu.

Pentru rezolvarea acestei probleme, vom introduce variabilele $y_1, y_2, y_3, y_4, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, \ldots, x_{44}$, definite după cum urmează:

(1) $$y_i = \begin{cases} 1, \text{ dacă în localitatea } L_i \text{ se} \\ \quad \text{construiește o fabrică;} \\ 0, \text{ în caz contrar} \end{cases}$$

(2) $x_{ij} =$ cantitatea de produs care se transportă de la L_i la C_j.

Este clar că funcția

(3) $$f = 3{,}5y_1 + 3{,}5y_2 + 3{,}5y_3 + 3{,}5y_4 + 0{,}7x_{11} + 0{,}6x_{12} + x_{13} + 0{,}9x_{14} + x_{21} + + 0{,}7x_{22} + 0{,}4x_{23} + 0{,}5x_{24} + 0{,}3x_{31} + 0{,}9x_{32} + 0{,}6x_{33} + 0{,}3x_{34} + 0{,}4x_{41} + 0{,}8x_{42} + 0{,}8x_{43} + 0{,}4x_{44}$$

exprimă costul total (anual) care trebuie minimizat, ținîndu-se seama de restricțiile impuse de problemă, și anume, următoarele:

(4) Pentru orice $i = 1, 2, 3, 4$: dacă $y_i = 0$, atunci

$$x_{i1} = x_{i2} = x_{i3} = x_{i4} = 0;$$

căci din faptul că $y_i = 0$ rezultă că în localitatea L_i nu s-a construit fabrica, și deci din L_i nu avem ce transporta.

Trebuie să avem:

(5) $$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &= 10, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &= 12, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &= 8, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} &= 10, \end{aligned}$$

căci suma cantităților care se transportă la consumatorul C_j trebuie să fie egală cu consumul lui C_j;

(6) $$x_{ij} \geqslant 0 \text{ pentru orice } i, j$$

căci o cantitate negativă de transportat nu ar avea sens;

(7) $$y_1, y_2, y_3, y_4 = 0 \text{ sau } 1,$$

din definiția cantităților y_i.

Prin urmare, din punct de vedere matematic, problema dată se exprimă astfel : să se minimizeze funcția (3), ale cărei variabile sînt supuse condițiilor (4), (5), (6), (7). La rîndul ei, această problemă se poate reduce la o alta, în care nu apar decît variabilele bivalente y_1, y_2, y_3, y_4.

În acest scop vom folosi următoarele observații, evidente din punct de vedere economic, și ușor demonstrabile matematic :

α) Se transportă marfă de la L_i la C_j ($x_{ij} > 0$) dacă și numai dacă următoarele condiții sînt îndeplinite :

$\alpha 1$) în L_i există o fabrică ($y_i = 1$);

$\alpha 2$) oricare ar fi localitatea L_h ($h \neq i$) în care există o fabrică, costul transportului de la L_h la C_j este mai mare decît costul transportului de la L_i la C_j;

β) dacă se transportă marfă de la L_i la C_j, atunci se transportă întreaga cantitate necesară centrului C_j.

În tabelul de mai jos se indică, pentru fiecare centru C_j, localitățile L_i în ordinea crescătoare a costurilor transporturilor de la L_i la C_j :

$$C_1 \quad L_3, \quad L_4, \quad L_1, \quad L_2,$$
$$C_2 : L_1, \quad L_2, \quad L_4, \quad L_3,$$
$$C_3 : L_2, \quad L_3, \quad L_4, \quad L_1,$$
$$C_4 : L_3, \quad L_4, \quad L_2, \quad L_1.$$

Putem acum traduce cu ușurință condițiile α) și β) prin relațiile de mai jos :

$$(8)\ x_{11} = 10y_1\bar{y}_3\bar{y}_4,\ x_{12} = 12y_1,\ x_{13} = 8y_1\bar{y}_2\bar{y}_3\bar{y}_4,$$
$$x_{14} = 10y_1\bar{y}_3\bar{y}_4\bar{y}_2,\ x_{21} = 10y_2\bar{y}_3\bar{y}_4\bar{y}_1,\ x_{22} = 12y_2\bar{y}_1,$$
$$x_{23} = 8y_2,\ x_{24} = 10y_2\bar{y}_3\bar{y}_4,\ x_{31} = 10y_3,$$
$$x_{32} = 12y_3\bar{y}_1\bar{y}_2\bar{y}_4,\ x_{33} = 8y_3\bar{y}_2,\ x_{34} = 10y_3,$$
$$x_{41} = 10y_4\bar{y}_3,\ x_{42} = 12y_4\bar{y}_1\bar{y}_2,\ x_{43} = 8y_4\bar{y}_2\bar{y}_3,$$
$$x_{44} = 10y_4\bar{y}_3.$$

De exemplu, condiția α) arată că $x_{21} > 0$ dacă și numai dacă $y_2 = 1$, dar $y_3 = y_4 = y_1 = 0$, adică dacă și numai dacă $y_2\bar{y}_3\bar{y}_4\bar{y}_1 = 1$. Ținînd seama și de β), deducem

că dacă $y_2\bar{y}_3\bar{y}_4\bar{y}_1 = 1$, atunci x_{21} 10, iar dacă $y_2\bar{y}_3\bar{y}_4\bar{y}_1 =$ $= 0$, atunci $x_{21} = 0$; aceste două condiții sînt echivalente tocmai cu egalitatea $x_{21} = 10y_2\bar{y}_3\bar{y}_4\bar{y}_1$. În mod analog se demonstrează și celelalte relații (8).

Ținînd seama de (8), funcția (3) devine

$$(9)\quad g(y_1, y_2, y_3, y_4) = 10{,}7y_1 + 6{,}7y_2 + 9{,}5y_3 + 3{,}5y_4 + \\ + 7y_1\bar{y}_3\bar{y}_4 + 17y_1\bar{y}_2\bar{y}_3\bar{y}_4 + 10y_2\bar{y}_3\bar{y}_4\bar{y}_1 + 8{,}4y_2\bar{y}_1 + \\ + 5y_2\bar{y}_3\bar{y}_4 + 10{,}8y_3\bar{y}_1\bar{y}_2\bar{y}_4 + 4{,}8y_3\bar{y}_2 + 8y_4\bar{y}_3 + 9{,}6y_4\bar{y}_1\bar{y}_2 + \\ + 6{,}4y_4\bar{y}_2\bar{y}_3.$$

Pe de altă parte, fiecare din condițiile (5) este echivalentă cu următoarea:

$$(10)\qquad \bar{y}_1\bar{y}_2\bar{y}_3\bar{y}_4 = 0.$$

(Într-adevăr, se vede ușor că expresiile (8) ale variabilelor $x_{11}, \ldots, x_{44}$ satisfac relațiile (5) dacă și numai dacă cel puțin una din variabilele y_i este egală cu 1).

În rezumat, problema dată revine la a găsi minimele funcției (9), cu condițiile restrictive (7) și (10).

O astfel de problemă poartă numele de problemă de programare pseudo-booleană, fiindcă funcția de minimizat (9) este o funcție cu valori reale de variabilele y_1, y_2, y_3, y_4, care iau numai valorile 0 și 1.

APLICAȚII ÎN LINGVISTICA MATEMATICĂ*

Fie V o mulțime finită și nevidă (numită *vocabular*) de elemente numite *cuvinte*. Orice șir finit ai cărui termeni sînt cuvinte este o *frază* pe V. O colecție de fraze pe V este un limbaj pe V. Fiind date două fraze $f = a_1a_2 \ldots a_n$ și $g = b_1b_2 \ldots b_m$, definim operația de compunere a acestor două fraze $h = fg = a_1a_2 \ldots a_nb_1b_2 \ldots b_m$. Operația de compunere a frazelor este asociativă ($(fg)h = f(gh)$) dar nu este comutativă, cu alte cuvinte, în general, $fg \neq gf$. *Lungimea* unei fraze $f = a_1a_2 \ldots a_n$ este, prin defi-

* Acest paragraf a fost alcătuit de Solomon Marcus.

niție numărul n al termenilor ei. Se consideră și *fraza vidă*, de lungime egală cu zero.

Fiind dat un limbaj L pe vocabularul V și fiind date două fraze f și g pe V, spunem că f domină pe g și scriem* $f \to g$ dacă, oricare ar fi frazele u și v pe V, din $ufv \in L$ rezultă $ugv \in L$. Este evident că relația de dominare depinde de L. Această relație este reflexivă și tranzitivă. Notînd cu V^* limbajul universal pe V (adică mulțimea tuturor frazelor pe V), putem deci spune că relația de dominare este o relație de preordine în V^*. Este ușor de văzut că relația $\to$ nu este antisimetrică, deci nu este, în general, o relație de ordine în V^*.

Spunem că două fraze f și g se domină reciproc și scriem $f \leftrightarrow g$ dacă avem $f \to g$ și $g \to f$. Relația de dominare reciprocă este o relație de echivalență în V^*.

Dacă V este vocabularul limbii române iar L este colecția frazelor românești corecte, atunci *frumos* $\to$ *subțire*, dar *subțire* nu domină pe *frumos*; într-adevăr, fraza *am o carte subțire* este corectă, în timp ce fraza *am o carte frumos* nu este corectă. Este însă ușor de văzut că avem *frumos* $\leftrightarrow$ *urît*.

Semnificația lingvistică a relației $\to$ este următoarea: dacă $a \in V$, $b \in V$ și $a \to b$, atunci oricare valoare morfologică a lui a este o valoare morfologică a lui b. De exemplu, valorile morfologice ale lui *frumos* sînt: *adjectiv*, *singular*, *masculin* și fiecare dintre acestea este și o valoare morfologică a lui *subțire*. Însă acest din urmă adjectiv posedă și valoarea morfologică de *feminin*, care nu aparține lui *frumos*.

Semnificația lingvistică a relației $\leftrightarrow$ este următoarea: clasele de echivalență în raport cu relația de dominare reciprocă sînt așa-numitele clase de distribuție considerate în lingvistică, clasa de distribuție a unei fraze f fiind totalitatea frazelor care apar exact în aceleași ambianțe ca și f. Mai precis, numind context pe V orice pereche ordonată $< u,v >$ de fraze pe V și convenind să spunem că contextul $< u,v >$ acceptă fraza f dacă $ufv \in L$, clasa

---

* Cititorul nu va confunda semnul „$\to$" al implicației (v. pp. 27, 121) cu semnul „$\to$" al dominației din acest paragraf.

de distribuție a frazei f este totalitatea frazelor care sînt acceptate exact de aceleași contexte ca și f.

Fie $L_1 \subset L$. Spunem că L_1 este un sublimbaj al lui L. Fiind date două fraze x și y, spunem că x domină pe y în raport cu L_1 și scriem

$$x \underset{L_1}{\rightarrow} y$$

dacă pentru orice pereche de fraze u și v astfel încît $uxv \in L_1$ avem $uyv \in L_1$. Spunem despre perechea ordonată de fraze (x,y) că este L_1-ereditară prin dominare dacă are loc una dintre următoarele două situații:

1° $x \rightarrow y$ și $x \underset{L_1}{\rightarrow} y$;

2° x nu domină pe y.

Dacă orice pereche ordonată de fraze este L_1-ereditară prin dominare, spunem că L_1 este un *sublimbaj ereditar prin dominare*. Se poate arăta că sublimbajele ereditare prin dominare alcătuiesc o algebră booleană de mulțimi.

Spunem despre sublimbajul L_1 că este *ereditar prin dublă dominare* dacă pentru orice pereche ordonată de fraze (x,y) pentru care $x \leftrightarrow y$ avem $x \underset{L_1}{\rightarrow} y$ și $y \underset{L_1}{\rightarrow} x$. Se poate arăta că sublimbajele ereditare prin dublă dominare alcătuiesc o algebră booleană de mulțimi.

Fie P o partiție a vocabularului V. Să notăm cu $P(x)$ acel termen al partiției P care conține cuvîntul x. Se definește astfel o aplicație a lui V în P. Această aplicație este o surjecție, dar nu este o injecție decît în cazul în care partiția P este partiția unitate (adică $P(x) = \{x\}$ pentru orice $x \in V$). În cazul în care L este o limbă naturală iar P este partiția după flexiune (de exemplu P (verde) $= \{$verde, verzi...$\}$) aplicația considerată asociază fiecărui cuvînt totalitatea formelor sale flexionare.

Această aplicație este o bijecție numai în cazul limbilor amorfe (cum sînt chineza și vietnameza), limbi lipsite de morfologie (deci în care nu există flexiune).

O altă partiție interesantă a vocabularului V este aceea care fiecărui cuvînt x îi asociază totalitatea cuvintelor care aparțin aceleiași clase de distribuție ca și x. Această

partiție se notează de obicei cu S și se numește partiția în familii.

Fie din nou un limbaj L pe V și o partiție P a lui V. Șirul $P(x_1)P(x_2)\ldots P(x_n)$, unde $x_1x_2\ldots x_n$ este o frază pe V, este, prin definiție, P — imaginea frazei $x_1x_2\ldots x_n$ prin partiția P. Un șir $P_1P_2\ldots P_n$ de termeni ai partiției P este *marcat* dacă el este P — imaginea a cel puțin unei fraze din L. Doi termeni P_i și P_j se zic P-echivalenți dacă pentru orice pereche $\mathfrak{X}_1$ și $\mathfrak{X}_2$ de P—imagini șirurile $\mathfrak{X}_1 P_i \mathfrak{X}_2$ și $\mathfrak{X}_1 P_j \mathfrak{X}_2$ sînt amîndouă marcate sau amîndouă nemarcate. Scriem în acest caz că $P_i \underset{P}{\leftrightarrow} P_j$. Denumirea de P-echivalență este îndreptățită, deoarece se verifică ușor că această relație este reflexivă, simetrică și tranzitivă în mulțimea termenilor partiției P. Să punem

$$P'(x) = \bigcup_{P(y) \underset{P}{\leftrightarrow} P(x)} P(y)$$

Mulțimile $P'(x)$ determină o nouă partiție a vocabularului V; aceasta este *partiția derivată* din P și se notează cu P'. Următoarele două exemple arată semnificația lingvistică importantă a noțiunii de derivată a unei partiții.

Dacă P este partiția unitate a lui V, atunci P' este tocmai partiția lui V în familii, despre care s-a vorbit mai sus.

Dacă P este partiția lui V după flexiune (deci P(casă) = {casă, casa, casei, caselor, case, casele}, P(frumos) = {frumos, frumoasă, frumoși, frumoase, ...}, etc.), atunci P' este partiția lui V în părți de vorbire (P'(casă) = mulțimea substantivelor, P'(frumos) = mulțimea adjectivelor calificative, etc.). Deci P' definește aici o surjecție a vocabularului V pe mulțimea termenilor partiției P'.

Fie L un limbaj pe V și fie P o partiție a lui V (partiție pe care, pentru sugestivitatea noțiunilor, o gîndim ca partiția lui V după flexiune). Vom defini în V o relație binară γ după cum urmează $a\gamma b$ dacă, pentru orice $a' \in P(a)$ și pentru orice $b' \in P(b)$, are loc cel puțin una din relațiile: $P(a) \cap S(b') \neq \emptyset$; $P(b) \cap S(a') \neq \emptyset$. Spunem despre cuvintele a și b că au același *gen gramatical*. Astfel, dacă L este colecția frazelor românești corecte, avem *pom*

γ *nunți*, *carte* γ *grădinii* și *scaune* γ *caiet*. Relația este reflexivă și simetrică în V, dar nu este, în general, tranzitivă. Există însă o clasă importantă de limbaje pentru care γ este o relație tranzitivă, deci o relație de echivalență. Acestea sînt limbajele pentru care relația $S(x) \cap \cap P(y) \neq \emptyset$ implică relația $S(y) \cap P(x) \neq \emptyset$ $(x,y \in V)$. Aceasta este situația în limbi ca franceza, italiana și spaniola, dacă facem abstracție de substantivele defective de număr (deci cărora le lipsesc formele de singular sau cele de plural).

■

Un sunet al unei limbi naturale este o mulțime finită de trăsături articulatorii (adică relative la modul de articulare a sunetului respectiv). Astfel, în limba română, P = {ocluziv, surd, bilabial}, F = {fricativ, surd, labiodental}, R = { vibrativ, neutru, mediopalatal}. Fiind date două sunete A și B concepute ca mulțimi de trăsături articulatorii, perechea ordonată * (A/B) se numește *opoziția* dintre A și B. Mulțimea $A \cap B$ se numește *baza opoziției* iar mulțimile $A - B$ și $B - A$ se numesc *mulțimile diferențiale* ale opoziției. Diferența simetrică $A + B$ se numește *caracteristica* opoziției. Opoziția (A/B) este: *privativă în favoarea lui A*, dacă $A \cap B = B$, $A - B \neq \emptyset$ și $B - A = \emptyset$; *privativă în favoarea lui B* dacă $A \cap B = A$, $A - B = \emptyset$, $B - A \neq \emptyset$; *privativă* dacă este privativă în favoarea lui A sau în favoarea lui B; *opoziție zero*, dacă $A \cap B = A = B$, $A - B = B - A = \emptyset$; *echipolentă*, dacă $A - B \neq \emptyset \neq B - A$, $A \cap B \neq \emptyset$; *disjunctivă*, dacă $A \cap B = \emptyset$, $A - B = A \neq \emptyset$, $B - A = B \neq \emptyset$. Astfel, opoziția dintre sunetele românești P și B este echipolentă, deoarece B = {ocluziv, sonor, bilabial}, deci $P \cap B$ = {ocluziv, bilabial} $\neq \emptyset$, $P - B =$ = {surd} $\neq \emptyset \neq$ {sonor} $= B - P$; opoziția dintre sunetele românești S și R este disjunctivă, deoarece $S =$ = {fricativ, surd, dental} și R = {vibrativ, neutru, mediopalatal}.

---

* Notăm cu (A/B) pentru a respecta scrierea obișnuită în lingvistica matematică, perechea numită obișnuit (A,B).

Două opoziții (A_1/B_1) și (A_2/B_2) se zic *proporționale* dacă ele au aceleași mulțimi diferențiale, cu alte cuvinte dacă $A_1 - B_1 = A_2 - B_2$ și $B_1 - A_1 = B_2 - A_2$. Se arată ușor că relația de proporționalitate este o relație de echivalență în mulțimea opozițiilor; clasele de echivalență corespunzătoare se numesc *clase de proporționalitate*. Astfel, în limba română opoziția dintre sunetele S și Z este proporțională cu opoziția dintre sunetele T și D, deoarece avem $S - Z = T - D = \{\text{surd}\}$, $Z - S = D - T = \{\text{sonor}\}$.

Două opoziții (A_1/B_1) și (A_2/B_2) se zic *omogene* dacă ele au aceeași bază, cu alte cuvinte dacă $A_1 \cap B_1 = A_2 \cap B_2$. Se arată ușor că relația de omogeneitate între două opoziții este o relație de echivalență; clasele de echivalență corespunzătoare se numesc *clase de omogeneitate*. În limba germană, opoziția dintre sunetele D și B este omogenă cu opoziția dintre D și G, baza comună a acestor opoziții fiind constituită dintr-un singur element: ocluziunea slabă.

O opoziție care nu este proporțională cu nici o altă opoziție se numește *opoziție izolată*. Astfel, opoziția dintre consoana românească L și semiconsoana românească notată Y este izolată, deoarece nu există în limba română o consoană laterală alta decît L, după cum nu există o consoană anteropalatală alta decît Y. În limba germană, opoziția dintre consoanele P și S este de asemenea izolată.

O opoziție care nu este omogenă cu nici o altă opoziție este prin definiție *singulară*. În limba română, opoziția dintre consoanele K și G este singulară, deoarece $K = \{\text{ocluziv, surd, velar}\}$, $G = \{\text{ocluziv, sonor, velar}\}$, $K \cap G = \{\text{ocluziv, velar}\}$ și nu există nici o altă opoziție între sunete românești, a cărei bază să fie {ocluziv, velar}. În limba germană, opoziția dintre consoanele T și D este singulară, deoarece acestea sînt singurele ocluzive dentale.

■

Fie un vocabular V, un limbaj L pe V și o mulțime $\mathbb{S}$ de elemente numite semnificații. Sistemul de obiecte $<V, L, \mathbb{S}>$ constituie un *suport biplan*. Orice relație binară ρ cu domeniul L și codomeniul $\mathbb{S}$ constituie,

prin definiție, o *structură semantică* pe suportul biplan $< V, L, \mathbb{S} >$; ρ este deci o parte a produsului cartezian $L \times \mathbb{S}$. Sistemul de obiecte $< V, L, \mathbb{S}, \rho >$ constituie un limbaj semantic. Într-un astfel de limbaj, două fraze x și y din L sînt *sinonime* dacă $(Ez)[(x\rho z)\&(y\rho z)]$. Numărul cardinal al mulțimii acelor t cu $(x\rho t)\&(y\rho t)$ este *ordinul* de sinonimie al cuplului de fraze $< x, y >$. Dacă x și y sînt sinonime, dar $\mathbb{S}(z/x\rho z) \neq \mathbb{S}(t,y\rho t)$ spunem că x și y sînt *parțial sinonime*. Două fraze sinonime care nu sînt parțial sinonime se numesc *total sinonime*. Două semnificații s și t sînt *omonime* dacă $(Ex)[(x\rho s)\&(x\rho t)]$. Numărul cardinal al mulțimii acelor z cu $(z\rho s)\&(z\rho t)$ este, prin definiție, ordinul de omonimie al cuplului $< s, t >$. Dacă semnificațiile s și t sînt omonime, dar $\mathbb{S}(x/x\rho s) \neq \mathbb{S}(y/y\rho t)$, spunem că s și t sînt *parțial omonime*. Două semnificații omonime s și t, astfel încît $\mathbb{S}(x/x\rho s) = \mathbb{S}(y/y\rho t)$, sînt *total omonime*.

Un limbaj semantic $< V, L, \mathbb{S}, \rho >$ pentru care, oricare ar fi $x \in L$ mulțimea $\mathbb{S}(s/x\rho s)$ conține cel mult un element este un *limbaj fără omonimie*. Se poate arăta că, într-un astfel de limbaj, mulțimea semnificațiilor s pentru care $\mathbb{S}(z/z\rho s) \neq \emptyset$ este cel mult numărabilă.

Spunem despre un limbaj fără omonimie că este un *limbaj științific* dacă următoarele două condiții sînt îndeplinite

α) Relația ρ este definită pe întregul limbaj L (adică $(Es)(x\rho s)$ pentru orice $x \in L$);

β) Oricare ar fi semnificația $s \in \mathbb{S}$, mulțimea $\mathbb{S}(x/x\rho s)$ este infinită.

Condiția α revine la a spune că relația ρ este o funcție $L \to \mathbb{S}$. Notînd această funcție cu f, se poate spune că un limbaj semantic este un limbaj științific dacă și numai dacă el este de forma $< V, L, \mathbb{S}, f >$, unde f este o funcție $L \to \mathbb{S}$ și fiecare mulțime de nivel nevidă a lui f este infinită. Fiind dat un suport biplan $< V, L, \mathbb{S} >$, pentru ca să existe o aplicație $f: L \to \mathbb{S}$ astfel încît $< V, L, \mathbb{S}, f >$ să fie un limbaj științific este necesar și suficient ca limbajul L să fie infinit. Dacă mulțimile L și $\mathbb{S}$ sînt infinite, atunci există o funcție $f: L \to S$

care ia o infinitate de valori și pentru care sistemul $< V, L, \mathbb{S}, f >$ este un limbaj științific.

Un limbaj semantic $< V, L, \mathbb{S}, \rho >$ este *lipsit de sinonimie* dacă pentru $x, y \in L, x \neq y$ avem $\mathbb{S}(s/x\rho s) \cap \mathbb{S}(t/y\rho t) = \emptyset$.

Numim *limbaj liric* orice limbaj semantic lipsit de sinonimie, în care fiecare mulțime $\mathbb{S}(s/x\rho s)$ (cu $x \in L$) este de puterea continuului, adică echipotentă cu mulțimea numerelor reale.

Addenda

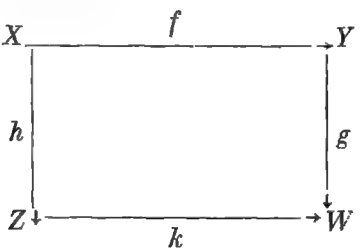
1. Produsul relațiilor nu este comutativ.

2. Termenii „relație de indentitate“ și „relație de egalitate“ sînt întrebuințați cu același înțeles.

3. Dacă

$$g \circ f = k \circ h$$

spunem că *diagrama*



e comutativă.

Teze ale logicii propozițiilor

		Pag.
6.4.	$p \to p$	129
6.5.	$(p \,\&\, q) \to p$	129
6.6.	$(p \,\&\, q) \to q$	129
6.7.	$p \to (p \vee q)$	129
6.8.	$q \to (p \vee a)$	129
6.9.	$[p \,\&\, (q \vee r)] \to [(p \,\&\, q) \vee (p \,\&\, r)]$	131
6.10.	$[(p \vee q) \,\&\, (p \vee r)] \to [p \vee (q \,\&\, r)]$	131
6.11.	$(p \leftrightarrow q) \to [(r \,\&\, p) \leftrightarrow (r \,\&\, q)]$	132
6.12.	$(p \leftrightarrow q) \to [(p \,\&\, s) \leftrightarrow (q \,\&\, s)]$	132
6.13.	$(p \leftrightarrow q) \to [(r \vee p) \leftrightarrow (r \vee q)]$	132
6.14.	$(p \leftrightarrow q) \to [(p \vee s) \leftrightarrow (q \vee s)]$	132
6.15.	$[(p \,\&\, (\neg\, p)) \vee q] \to q$	133
6.16.	$p \to [p \,\&\, (q \vee \neg\, q)]$	133
6.29.	$[(p \to q) \,\&\, (q \to r)] \to (p \to r)$	137
6.35.	$[(p \leftrightarrow q) \,\&\, (s \leftrightarrow t) \to (p \,\&\, s) \leftrightarrow (q \,\&\, t)]$	140
6.36.	$[(p \leftrightarrow q) \,\&\, (s \leftrightarrow t) \to [(p \vee s) \leftrightarrow (q \vee t)]$	140
6.37.	$[(p \leftrightarrow q) \,\&\, (s \leftrightarrow t)] \to [(p \to s) \leftrightarrow (q \to t)]$	140
6.38.	$(p \leftrightarrow q) \to [(q \to r) \leftrightarrow (p \to r)]$	141
6.39.	$(p \leftrightarrow q) \to [(s \to q) \leftrightarrow (s \to p)]$	141
6.40.	$[(p \to q) \,\&\, (q \to p)] \to (p \leftrightarrow q)$	141
6.41.	$(p \leftrightarrow q) \to [(p \to q) \,\&\, (q \to p)]$	141
6.42.	$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \to q) \,\&\, (q \to p)]$	141
6.43.	$[(p \to q) \,\&\, (p \to r)] \to [(p \to (q \,\&\, r)]$	143
6.44.	$[(p \to r) \,\&\, (q \to r)] \to [(p \vee q) \to r)]$	143
6.45.	$(p \to q) \to (\neg\, q \to \neg\, p)$	144
6.46.	$p \leftrightarrow \neg\, \neg\, p$	144
6.47.	$p \vee \neg\, p$	145
6.48.	$\neg\, (p \,\&\, \neg\, p)$	145

Pag.

6.49. $[(p \to q) \,\&\, (p \to \neg q)] \to (\neg p)$ 145
6.50. $[(p \to q) \,\&\, (\neg p \to q)] \to q$ 145

■

7.4. $p \to (q \to p)$ 157
7.5. $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ 157
7.6. $(p \leftrightarrow q) \to (p \to q)$ 157
7.7. $(p \leftrightarrow q) \to (q \to p)$ 157
7.8. $(p \to q) \to ((q \to p) \to (p \leftrightarrow q))$ 157
7.9. $(p \,\&\, q) \to p$ (identic cu 6.5.) 157
7.10. $(p \,\&\, q) \to q$ (identic cu 6.8.) 157
7.11. $(p \to q) \to ((p \to r) \to (p \to (q \,\&\, r)))$ 157
7.12. $p \to (p \vee q)$ (identică cu 6.7.) 157
7.13. $q \to (p \vee q)$ (identică cu 6.8.) 157
7.14. $(p \to r) \to ((q \to r) \to ((p \vee q) \to r))$ 158
7.15. $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$ (identică cu 6.45) 158
7.16. $p \leftrightarrow \neg\neg p$ (identică cu 6.46) 158

Teze ale teoriei mulțimilor și ale logicei predicatelor monare

a) *Definiții*

6.1* $[x \in (\alpha \cap \beta)] \leftrightarrow [(x \in \alpha) \,\&\, (x \in \beta)]$ 125
6.2.* $[x \in (\alpha \cup \beta)] \leftrightarrow [(x \in \alpha) \vee (x \in \beta)$ 125
6.3.* $(x \in \bar{\alpha}) \leftrightarrow \neg (x \in \alpha)$ 125
6.17° $(\alpha \subset \beta) \leftrightarrow (x)[(x \in \alpha) \to (x \in \beta)]$ 135
6.18° $(\alpha = \beta) \leftrightarrow (x)[(x \in \alpha) \leftrightarrow (x \in \beta)]$ 135
6.19° $(x)\ (x \in I)$ 136
6.51° $\neg(Ex)\ (x \in \emptyset)$ 147

b) *Tezele* 6.4.* (p. 129),... etc. care provin din tezele logicei propozițiilor 6.4, etc., înlocuind variabilele propoziționale p, q...prin $x \in \alpha$, etc.

c) *Tezele* 6.4° (p. 136) etc. care provin din tezele 6.4* (p.136) de tipul b prin principiul generalizării.

d) *Teze* de tipul b se obțin și înlocuind în teze ale logicii propozițiilor 6.4 (p. 129) etc. pe p, q... prin $P(x)$, $Q(x)$,... pentru a obține teze de forma 6.4* $P(x) \to P(x)$.

e) *Teze* de tipul c se obțin și din tezele de tipul d prin principiul generalizării, de exemplu din 6.4* pe (x) $[P(x) \to P(x)]$.

f) *Alte teze* ale teoriei mulțimilor și logicei predicatelor monare:

	Pag.
6.30. $\{(x)[P(x) \to Q(x)]\} \to \{[(x)P(x)] \to [(x)Q(x)]\}$	138
6.31. $\{(x)[P(x) \,\&\, Q(x)]\} \leftrightarrow \{[(x)P(x)] \,\&\, [(x)Q(x)]\}$	138
6.32. $\{(x)[P(x) \leftrightarrow Q(x)]\} \leftrightarrow \{[(x)P(x)] \leftrightarrow [(x)Q(x)]\}$	139
6.52. $[\neg (x)p] \leftrightarrow [(Ex)(\neg p)]$	147
6.53. $[\neg (Ex)p] \leftrightarrow [(x)(\neg p)]$	147
6.54. $[(Ex)p] \leftrightarrow [\neg (x)(\neg p)$	147
6.55. $[(x)p] \leftrightarrow (\neg (Ex)(\neg p)]$	147
6.56. $[(x)p] \vee [(Ex)(\neg p)]$	147
6.57. $[(Ex)p] \vee [(x)(\neg p)]$	147
6.60. $\neg[(x)p \,\&\, (Ex)(\neg p)]$	147
6.61. $\neg[(Ex)p \,\&\, (x)(\neg p)]$	147

g) *Axiomele algebrelor booleene* 113

I.1. $\alpha \subset \alpha$	129
I.2. dacă $\alpha \subset \beta$ și $\beta \subset \gamma$ atunci $\alpha \subset \gamma$	140
I.3. dacă $\alpha \subset \beta$ și $\beta \subset \alpha$ atunci $\alpha = \beta$	141
II.1. $\alpha \cap \beta \subset \alpha$	129—130
II.2. $\alpha \cap \beta \subset \beta$	129—130
II.3. dacă $\gamma \subset \alpha$ și $\gamma \subset \beta$ atunci $\gamma \subset \alpha \cap \beta$	142
II.4. $\alpha \subset \alpha \cup \beta$	129—130
II.5. $\beta \subset \alpha \cup \beta$	129—130
II.6. dacă $\alpha \subset \gamma$ și $\beta \subset \gamma$ atunci $\alpha \cup \beta \subset \gamma$	143
III.1. $\alpha \cap (\beta \cup \gamma) \subset (\alpha \cap \beta) \cup (\alpha \cap \gamma)$	131
III.2. $\alpha \cup (\beta \cap \gamma) \supset (\alpha \cup \beta) \cap (\alpha \cup \gamma)$	133
IV.1 $(\alpha \cap \bar{\alpha}) \cup \beta \subset \beta$	133
IV.2. $(\alpha \cup \bar{\alpha}) \cap \beta \supset \beta$	134

Alte teze

$\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$	144
dacă $\alpha \subset \beta$ atunci $\bar{\beta} \subset \bar{\alpha}$	143
$\alpha \cup \bar{\alpha} = I$	145
$\alpha \cap \alpha = \varnothing$	145

Pag.

dacă $\alpha \subset \beta$ și $\alpha \subset \bar{}$ atunci $\alpha = \varnothing$ 146
dacă $\alpha \subset \beta$ și $\bar{\alpha} \subset \beta$ atunci $\beta = I$ 146

Teze ale logicii relaţiilor binare

a) *Definiţii*

6.1** $[x(R \,\&\, S)y] \leftrightarrow [(xRy) \,\&\, (x\,S\,y)]$ 126
6.2.** $[x(R \vee S)y] \leftrightarrow [(x\,R\,y) \vee (x\,S\,y)]$ 127
6.3.** $(x\,\overline{R}\,y) \leftrightarrow \neg(x\,R\,y)$ 127

6.17°° $(R \Rightarrow S) \leftrightarrow \{(x)\,(y)\,[(x\,R\,y) \rightarrow (x\,S\,y)]$
6.18°° $(R \Leftrightarrow S) \leftrightarrow \{(x)\,(y)\,[(x\,R\,y) \leftrightarrow (xSy)]$

b) *Tezele* 6.4** (p. 129) etc. care provin din teze ale logicei propoziţiilor 6.4,... etc. înlocuind variabilele propoziţionale p prin xRy,...

c) *Teze* de tipul

$$6.4^{\circ\circ}\ (x)\,(y)\,[(xRy) \rightarrow (xRy)]$$

care provin din teze de tipul b: $(xRy) \rightarrow (xRy)$ aplicînd de două ori principiul generalizării pentru a obţine

$$(y)\,[(xRy) \rightarrow (xRy)]$$

şi apoi 6.4°°:

$$(x)\,(y)\,[(xRy) \rightarrow (xRy)]$$

d) *Alte teze* ale logicei relaţiilor binare

$$[(x)\,(y)R\,(x, y)] \leftrightarrow [(y)\,(x)\,R\,(x, y)]$$
$$[(Ex)\,(Ey)\,R\,(x, y)] \leftrightarrow [(Ey)\,(Ex)\,R\,(x, y)]$$
$$(x\,\widetilde{R}\,y) \leftrightarrow (y\,R\,x)$$

Teze ale logicii predicatelor cu identitate

7.25. $a = a$ 164
7.26. $(a = b) \rightarrow [P(a) \rightarrow P(b)]$ 164
7.27. $(a = b) \rightarrow (b = a)$ 165
7.28. $(a = b) \rightarrow [(b = c) \rightarrow (a = c)]$ 165
7.29. $(\alpha)\,[(x \in \alpha) \rightarrow (y \in \alpha)] \rightarrow (x = y)$ 166
7.30. $(P)\,[P(x) \rightarrow P(y)] \rightarrow (x = y)$ 166

Indice de semne

$\in$ 9, 149
$\notin$ 9, 149
$\subset$ 10, 113, 149
$\cup$ 11, 113, 149
$\cap$ 15, 113, 149
$\bigcup_{\alpha\in\emptyset}$, $\bigcup_{\alpha\in I}$, $\bigcap_{\alpha\in\emptyset}$, $\bigcap_{\alpha\in I}$ 106, 107
0 18, 149
I 21, 149
$\{a\}$ 19
— 23, 113
25, 124, 149
27
$\dot{+}$ 29
29
$\top$ 31
$\perp$ 30
27, 121, 148, 153
$\Rightarrow$ 37, 149
$\leftrightarrow$ 122, 148, 153
$\Leftrightarrow$ 38, 149
& 37, 123, 148, 152
$\vee$ 40, 124, 148, 152
] 124, 148, 152
$\sim$ 43
$=$ 44, 197
$:=$ 57
$\times$ 51
$\circ$ 68
$\rightsquigarrow$ 56
$\mathcal{K}$ 39
f_M 60
$f/_M$ 59
$\hat{f}$ 61
$\hat{f}^*$ 63
f^* 63
i_D 59
$i/_M$ 65
$\Im(x)\colon P(x))$ 167

Indice de cuvinte

A, judecăți aristotelice în A 34
(A), axioma (A) (legea de absorbție) 114, 115
absorbție, legile de **a** pentru mulțimi 23
— legile de **a** pentru relații 40
— axioma (A) 114, 115
abstracție, definiție prin **a** 47
adevăr, valoarea logică **a** 151, 152
adjuncției, regula **a** 126
afirmative, judecăți particulare **a** (în I) 36
— — universale **a** (în A) 34
algebre booleene 112
— — axiomele **a. b.** 113
— — mulțimile formează o **a·b** 113
— — relațiile formează o **a. b** 117
— — orice **a. b** e o latice 115
antisimetrică, relație **a** 49
— relație strict **a** 49
— incluziunea mulțimilor e **a** 10
— implicația relațiilor e **a** 38
apartenență, relație de **a** 9
aristotelică, forma **a** a judecăților 34, 36
asociativitatea
— conjuncția relațiilor e **a** 39
— disjuncția relațiilor e **a** 40
— intersecția infinită a mulțimilor e **a** 93
— — mulțimilor e **a** 16
— produsul cartesian e **a** 79
— produsul relațiilor e **a** 42
— reuniunea infinită a mulțimilor e **a** 88
— reuniunea mulțimilor e **a** 12
— suprapunerea funcțiilor e **a** 67
axioma (A) 114
axiomele algebrelor booleene 113
— logicii predicatelor 161
— logicii predicatelor cu identitate 164
— — propozițiilor 157

Banach (teorema lui **B**) 107
bijecții 65
binare, relații **b** 37, 149
booleene (vezi algebre **b**)

caracteristică, funcție **c** a unei mulțimi 60
cartesian, produs **c** a două mulțimi 51
— produs **c** al mai multor mulțimi 78, 96
— — legea de asociativitate 79
— — al unei infinități de mulțimi 97
— — axioma lui Zermelo 99
categorie 176
Church, funcția lui **c** 33
ciclu 170
ciclu frontieră 170
cît, mulțimea **c** 47
— funcții și relații în mulțimea **c** 84

clase de echivalență 46
cociclu 171
cociclu cofrontieră 171
codomeniul unei funcții 56
— unei relații 43
cofrontieră 171
compatibilitate 44, 55
complementara unei mulțimi 23
complex 170
compoziție (vezi legi de c)
comutativitatea
— conjuncției relațiilor 39
— disjuncției relațiilor 40
— intersecției mulțimilor 15
— reuniunii mulțimilor 11
conex, graf c 171
conjuncția propozițiilor 123
— relațiilor 37
— — asociativitatea ei 39
— — comutativitatea ei 39
— — legile distributive 40
— — legile de idempotență 39
— — alte proprietăți ale c. r 40, 42
constantă, funcție c 59
contradicție, principiul c 24, 145
coomologie, grupul de c 171
cuantor, existențial 146, 149
— universal 134, 149

deductivă, schemă d valabilă 156
definiție prin abstracție 47
— semantică a schemelor valabile ale logicii prepozițiilor 156
— — a tezelor logicii propozițiilor 154
— sintactică a schemelor valabile ale logicii propozițiilor 160
— — a tezelor logicii predicatelor 161
— — a tezelor logicii propozițiilor 159
echivalențe definițiilor sintactică și semantică pentru tezele logicii propozițiilor 160
demonstrație, în logica predicatelor 161
— — — predicatelor cu identitatea 164
— — — propozițiilor 158
— din ipoteze în logica propozițiilor 159
dependentă, variabilă d 56
deschis, drum d 171
diagonala unui produs cartesian 53
diferența a două mulțimi 25
— simetrică a două mulțimi 29
dilema, principiul d 128
directă, suma d a două mulțimi 70
disjuncte, mulțimi d 17
disjuncția condiționată a două mulțimi 33
— propozițiilor 124
— relațiilor 40
— — asociativitatea d. r 40
— — comutativitatea d. r 40
— — legile distributive ale d r 40
— — idempotența d. r 40
— alte proprietăți ale d r 40, 42
distributivitatea, legile de d
— ale disjuncției și conjuncției relațiilor 40
— ale intersecției și reuniunii mulțimilor 22
— ale intersecției și reuniunii infinite de mulțimi 100
— ale produsului cartesian 52
— ale produsului relațiilor 42
domeniul unei funcții 56
— unei relații 43
duală, suma d a două mulțimi 29
dublei negații, principiul d. n 24, 144
drum deschis 171
— închis 171

E, judecăți aristotelice în *E* 34
echivalența (sau suma duală) a două mulțimi 29

— trecerea de la echivalență la implicație și de la implicație la echivalență 127
— în logica propozițiilor 122
— relațiilor 38
— — reflexivitatea e · r 38
— — simetria e · r 38
— — transitivitate e. 38
— clase de e 46
— relații de e 46
— — e generate de o funcție 73
— silogism ipotetic cu e 127
echivalența între definiția sintactică și definiția semantică în logica propozițiilor 160
egalitatea, relația de e (de identitate) 44, 197
— — — e între mulțimi 9, 44
— — — — — — reflexivitate 44
— — — — — — simetrie 44
— — — — — — transitivitate 44
— — — e între funcții 58
— — — — — — reflexivitatea
— — — — — — simetria
— — — — — — transitivitate
excluderea terțiului (vezi principiul e t)
existențial, cuantorul e 146, 149
exponențială, legea e pentru produsul cartesian 81
expresie în logica predicatelor 161
— — logica predicatelor cu identitatea 164
— — logica propozițiilor 151
extinderea unei funcții 60
— unei funcții de elemente la o funcție de mulțimi 61
— identică 59
— — e o bijecție
— — — — injecție 65
— — — — surjecție 62
— majoritară 32
— în mulțimea cît 84
— de mai multe variabile 81
— lui Peirce 31
— lui Sheffer 30
— selectivă 99
— codomeniul unei f 56
— domeniul unei f 56
— egalitatea a două funcții 58
— extensiunea unei f 59
— extinderea unei f de element la o f de mulțime 61
— identitatea a două f 58
— restricția unei f 59
— suprapunerea a două f 66
— — legea de asociativitate a ei 67
— valoarea unei f 56
funcțională, relație 77

generalizare, demonstrație prin g 136
graf 169
— conex 171
— tare conex 171
grupul ciclurilor 170
— — frontieră 170
— cociclurilor 171
— — cofrontieră 171
— de coomologie 171
— lanțurilor 170
— omologie 171

Hom 176

frontieră 170
funcție 56
— caracteristică a unei mulțimi 60
— constantă 59
— cu domeniul și codomeniul finit 74,75

I judecăți aristotelice în *I* 36
idempotența conjuncției relațiilor 39
— disjuncției relațiilor 40
— intersecției mulțimilor 16
— reuniunii mulțimilor 14

identică, funcţia **i** 59
identitate, identitate funcţiilor 58
— relaţia de identitate (de egalitate), 44. 164, 197
— — — — compatibilitatea 44
— — — — reflexivitatea 44, 164
— — — — simetria 44, 165
— — — — transitivitatea 44, 165
— — — — indiscernabilitatea 166,
— logica predicatelor şi a identităţii 164
implicaţia propoziţiilor 122
— — trecerea de la implicaţie la echivalenţă şi de la echivalenţă la implicaţie 127
— relaţiilor 37
— — reflexivitatea 37
— — transitivitatea 37
incidenţă, matrice de **i** 170
independenţă variabilă **i** 56
indexată, mulţime **i** 77
incluziunea mulţimilor 10
— antisimetria 10
— reflexivitatea 10
— transitivitatea 10
— ca injecţie canonică 65
indivizi, relaţii între indivizi şi mulţimi, 149
infinită, intersecţie **i** 91
— produs cartesian **i** 96
— reuniune **i** 87
injecţie 64
— incluziunea ca injecţie 65
ipotetic, silogismul **i** 127, 155
ipoteze, demonstraţie din **i** 159

lanţ, 170
latice 114
legi de compoziţie 112
— — — între mulţimi
— — — —diferenţa 25
— — — — — diferenţa simetrică (suma) 29
— — — — — echivalenţa (suma duală) 29
— — — — — intersecţia 15
— — — — — „nici", funcţia **n** 31
— — — — — Peirce, funcţia lui **p** 31
— — — — — reuniunea 11
— — — — — reziduaţia 27
— — — — — suma (diferenţa simetrică) 29
— — — — — suma duală (echivalenţa) 29
— — — — — Sheffer, funcţia lui **s** 30
legi de compoziţie) între propoziţii (vezi propoziţii)
legi de compoziţie între relaţii
— — — — — conjuncţia 37
— — — — — disjuncţia 40
— — — — — produsul 41
proprietăţile legilor de compoziţie
— — — — asociativitatea (vezi **a**)
— — — — comutativitate (vezi **c**)
— — — — idempotenţe (vezi **i**)
proprietăţile perechilor de legi de compoziţie
— — — — — — absorbţia 23, 40, 114, 115
— — — — — — distributivitate 23, 40, 113
logica predicatelor
— — axiomele **l. p** 161
— — demonstraţia în **l. p** 161
— — expresii în **l. p** 161
— — teze în **l. p** definiţia sintactică 161
logica predicatelor cu identitate
— — — — axiomele **l. p. i** 164
— — — — demonstraţia în **l. p. i** 164
— — — — expresii în **l. p. i** 164
— — — — teze în **l. p. i** 164
logica predicatelor cu variabile libere 150
logica propoziţiilor
— — axiomele **l, p** 157
— — demonstraţia în **l. p** 158
— — demonstraţia din ipoteze în **l. p.** 159
— — expresii în **l.p.** 151
— — scheme valabile, definiţia semantică 156

— — teze, definiția semantică 154
— — — definiția sintactică 157
— — — echivalența definițiilor 160

matrice asociată unei relații 167
modus ponens 126, 154, 158
Morgan, legile lui **M** pentru intersecție și reuniuni de mulțimi 24
— — — pentru intersecție și reuniuni infinite de mulțimi 95
mulțimi 9, 149
— mulțime atomică 20
— cît 47
— de mulțimi 85
— cu un singur element 19
— indexată 77
— totală 21
— tipuri de mulțimi (vezi tipuri)
submulțimile unei mulțimi formează o algebră booleană 113

negația propozițiilor 124
negative, judecăți particular (în O) 36
— — universal **n** (în E) 34

Ob 176
O, judecăți aristotelice în O 36
ordine, relația de ordine parțială 49
— relația de ordine parțială strictă 50

partiții 96
particulare judecăți **p** afirmative (în I) 36
— judecăți **p** negative (în O) 36
Peirce, funcția lui **p** 31
predicate, logica predicatelor (vezi logica predicatelor)
— — — cu variabile libere (vezi logica predicatelor cu variabile libere)
preordine, relația de preordine 45
— — — — reflexivitatea 45
— — — — tranzitivitatea 45
ponens, (vezi modus **p**)
principiul contradicției 24, 145
— dilemei 128
— dublei negații 24, 144
— excluderii tertiului 24, 145
— generalizării 136
— silogismului ipotetic 127
produs cartesian (vezi cartesian)
produs cartesian infinit (vezi cartesian)
produs de relații (vezi legi de compoziție între relații)
propoziții, conjuncție 123
— disjuncție 124
— echivalență 122
— implicație 121
— logica propozițiilor (vezi logica propozițiilor)
— negație 124
— valoarea logică a unei propoziții 152
— de teoria mulțimilor 136
— — de teoria relațiilor binare 136
— — de teoria mulțimilor și relațiilor binare 136
— propozițională, variabilă propozițională 148
proprietăți ale legilor de compoziție între mulțimi (vezi legi de compoziție între mulțimi)
— ale legilor de compoziție între relații (vezi legi de compoziție între relații)
— ale mulțimilor 166
— ale relațiilor
— — — antisimetria 49
— — — compatibilitatea 44, 55
— — — ireflexivitatea 49
— — — de a fi relație funcțională 77

— — — reflexivitate 44, 45, 46, 49
— — — simetria 44, 46
— — — stricta antisimetrie 49
— — — transitivitate 44, 45 46, 49

reflexivitatea 44, 45, 46, 49
— echivalenței relațiilor 38
— identității 164
— implicației relațiilor 37
— incluziunii mulțimilor 10
relații antisimetrice 10, 49
— binare 37
— — conjuncția r b 37
— — de echivalență 46
— — — — generate de o funcție 73
— — de identitate (de egalitate) 44, 164, 197
— — de ordine parțială 49
— — de ordine parțială strictă 50
— — de preordine 45
— — disjuncția r · b 40
— — echivalența r · b 38
— — funcționale 77
— — implicația r · b 37
— — negația unei r · b 39
— — produsul a două r · b 41
— — proprietățile r · b (v. proprietățile relațiilor)
— în mulțimea cît 84
— între indivizi 37
— între indivizi și mulțimi
— — apartenența 9
— — neapartenența 9
— între legi de compoziție
— — absorbția 23
— — distributivitatea 22
— între mulțimi
— — disjuncția 17
— — incluziunea 10
— între relații
— — — echivalența 38
— — — implicația 37
— proprietățile legilor de compoziție între relații (v. — proprietățile legilor de compoziție)
— cuaternare 54
— n-are, 54
— reflexive 10, 37, 38, 44, 45,
— strict antisimetrice 49
— simetrice 10, 38, 44, 46
— ternare 54
— transitive 10, 37, 38, 44, 45, 46, 49
restricția unei funcții 59
resturi 48, 120
reuniunea mulțimilor 11
— — asociativitatea 12
— — comutativitatea 11
— — idempotența 14
reuniunea infinită 87
— — asociativitatea 88
reziduația 27

scheme deductive valabile, definiția semantică 156
selectivă, funcție s 99
semantică (v. definiția semantică)
Sheffer, funcția lui s 30
simetrică, (v. relație s)
simetria echivalenței relațiilor 38
— idendității 44
— relațiilor de echivalență 46
simplex 0-dimensional 170
— 1-dimesional 170
sintactică (v. definiția sintactică)
suma directă a două mulțimi 70
suma 29
suma duală 29
suprapunerea funcțiilor 66
— asociativitatea s.f. 67
strict antisimetrică 49
surjecție 62

teze ale logicii propozițiilor, definiția semantică 154
— — — — definiția sintactică 157
— — — predicatelor, definiția sintactică 161

— — — cu identitate, definiția sintactică, 164
transpusa unei relații 43
— proprietățile transpoziției 43
tranzitivitatea echivalenței relațiilor 38
— identității 44, 165
— implicației relațiilor 37
— incluziunii mulțimilor 10
— relațiilor de echivalență 46
— — de preordine 45
— — de ordine 49
universale, judecăți u afirmative 34
— — u negative 34

valoarea funcției 56
— logică 152
variabila dependentă 56
— independentă 56

Zermelo, axiomul lui Z 99

Tabla de materii

Prefață 5

I. Algebra mulțimilor 9

Incluziunea 10
Reuniunea 11
Intersecția 15
Mulțimea vidă, mulțimea totală, mulțimi cu un singur element 17

Mulțimi disjuncte 17
Mulțimea vidă și mulțimile cu un element 18
Mulțimea totală 21

Legile de distributivitate și de absorbție 22
Legile de distributivitate 22
Legile de absorbție 23

Complementera unei mulțimi 23

Exerciții 25
Diferența 25
Reziduația 27
Suma (diferența simetrică) 29
Suma dual sau echivalența 9
Funcția lui Sheffer 0
Funcția „nici" 1
Funcția majoritară 32
Disjuncția condiționată 33

Forma aristotelică a judecăților 33

II. Algebra relațiilor 37

Relații binare 37
Implicația relațiilor 37
Conjuncția relațiilor 37

Echivalența relațiilor 38
Negația unei relații 39
Disjuncția relațiilor 40
Produsul relațiilor 41
Transpusa unei relații 43

Relația de identitate 44
Relații de preordine 45
Relații de echivalență 46

Clase de echivalență 46

Relații de ordine 49
Produs cartezian 51
Relații n-are 54

III. Funcții 56

Definiția noțiunii de funcție 56
Restricția și extensiunea unei funcții 59
Funcția caracteristică a unei mulțimi 60
Extinderea unei funcții la o funcție de submulțimile domeniului 61

Surjecții 62

Funcția pseudoinversă 62

Injecții 64

Incluziunea ca funcție 65

Bijecții 65

Suprapunerea a două funcții 66

Alte proprietăți ale funcțiilor 70
Relația de echivalență generată de o funcție 73

Funcții cu domeniul sau cu codomeniul finit 74

Funcții cu domeniul finit 74
Funcții cu domeniul și codomeniul finit 75

Șiruri 76

Mulțimi indexate 77

Relații funcționale 77
Produsul cartezian al mai multor mulțimi 78
Funcții de mai multe variabile 81

Proprietăţi diverse 82
Funcţii şi relaţii în mulţimea cît 84

IV. Mulţimi de mulţimi 85
Reuniune infinită 87
Intersecţie infinită 91
Partiţii 96
Produs cartezian infinit 96
Axioma lui Zermelo 99
Legile distributive 100
Legile de idempotenţă 103

Proprietăţi ale endomorfismelor 104
Observaţii 106

Teoreme lui Banach 107

V. Algebre booleene 112
Algebra booleană $\mathfrak{L}_2$ 119

VI. Reducerea algebrei mulţimilor şi a algebrei relaţiilor la logica predicatelor 121
Implicaţia, conjuncţia, echivalenţa, disjuncţie şi negaţia 121
Tipuri de demonstraţii 126
Demonstraţii folosind teoreme ale logicii propoziţiilor 129
Cuantorul universal 134
Cuantorul existenţial 146

VII. Analiza judecăţilor din capitolele precedente 148
Alfabetul utilizat 148
Definiţia semantică a tezelor în logica propoziţiilor 151
Definiţia sintactică a tezelor în logica propoziţiilor 157
Definiţia sintactică a tezelor în logica predicatelor 161
Identitetea 164
Mulţimea elementelor ce au o proprietate dată 167
Relaţii binare într-o mulţime finită 167
Teoria grafurilor 169
Teoria tipurilor 172

VIII. Aplicaţiile logicii matematice 178
Aplicaţii la teoria clasificării 178
Aplicaţii la circuitele cu contacte 182
Aplicaţii în Economia matematică 186
Aplicaţii în Lingvistica matematică 189

Addenda 197
Teze ale logicii propoziţiilor 199
Teze ale teoriei mulţimilor şi ale logicii predicatelor monare 200
Teze ale logicii relaţiilor binare 202
Teze ale logicii predicatelor cu identitata 202
Indice de semne 203
Indice de cuvinte 204

Lei 5,50

editura științifică

Prezenta lucrare a Acad. Gr. C. Moisil constituie o introducere în care, plecîndu-se de la cîteva fapte intuitive privind mulțimile de puncte care se regăsesc în studiul relațiilor, se ajunge la a motiva necesitatea demonstrării lor riguroase. Această demonstrare e redusă la o teorie algebrică, aceea a algebrelor booleene, aceasta la logica predicatelor ultima la logica propozițiilor. În ultimul capitol se indică posibilitatea aplicării logicii matematice la probleme de teoria clasificării, la studiul circuitelor de comutație, în economia matematică, în lingvistica matematică, precum și legăturile teoriei relațiilor cu teoria grafurilor și topologia algebrică.